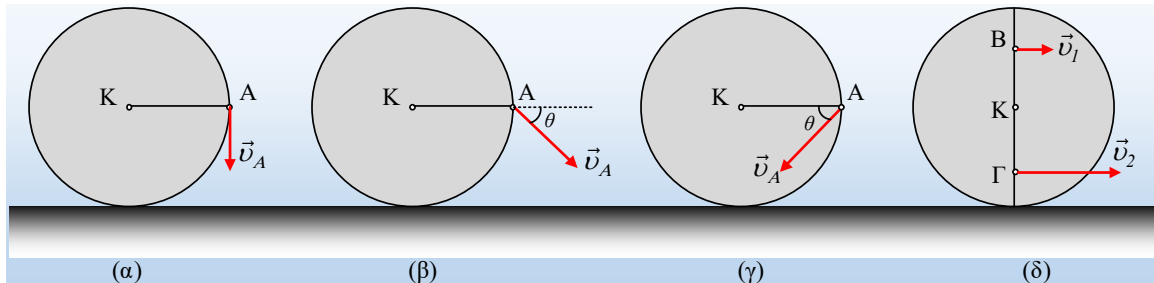


Ελέγχοντας 4 δίσκους για κύλιση.

Ένας ομογενής δίσκος κέντρου K κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και το σημείο A, είναι στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας (στα σχήματα α, β και γ). Στο σχήμα (δ) τα σημεία B και Γ είναι πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο και ισαπέχουν του κέντρου K.

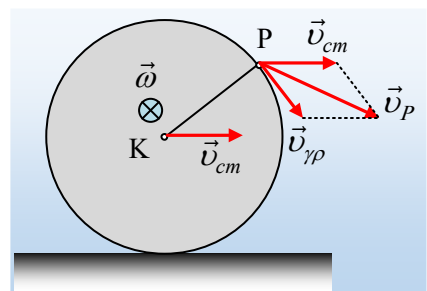


- i) Τι κίνηση πραγματοποιεί ο δίσκος του (α) σχήματος, όπου η ταχύτητα v_A είναι κατακόρυφη;
- ii) Στο σχήμα (β), αν $\theta=45^\circ$, να εξηγήσετε γιατί ο δίσκος κυλιέται προς τα δεξιά.
- iii) Στο σχήμα (γ), αν $\theta=45^\circ$, να εξετάσετε αν ο δίσκος κυλιέται ή όχι.
- iv) Οι ταχύτητες των σημείων B και Γ του δίσκου του (δ) σχήματος, είναι οριζόντιες με μέτρα $v_1=1\text{m/s}$ και $v_2=3\text{m/s}$ αντίστοιχα. Τότε ο δίσκος:
 - α) κινείται προς τα δεξιά και στρέφεται δεξιόστροφα.
 - β) Έχει ταχύτητα v_{cm} προς τα δεξιά και στρέφεται αριστερόστροφα.
 - γ) Κινείται προς τα αριστερά και στρέφεται δεξιόστροφα.
 - δ) Έχει ταχύτητα v_{cm} προς τα αριστερά και στρέφεται αριστερόστροφα.

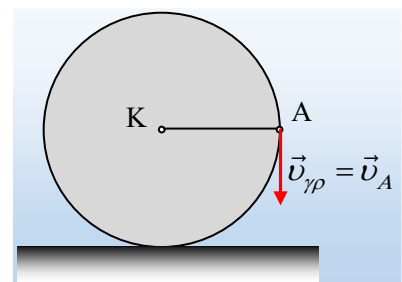
Ποια από τα παραπάνω ενδεχόμενα μπορεί να ισχύουν; Μήπως ο δίσκος αυτός κυλιέται;

Απάντηση:

Θεωρούμε την κίνηση του δίσκου σύνθετη. Μια μεταφορική με ταχύτητα του κέντρου του v_{cm} και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το κέντρο του K με γωνιακή ταχύτητα ω . Έτσι κάθε σημείο, όπως το σημείο P του σχήματος, θα έχει τις ταχύτητες που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, όπου $v_{\gamma P}$ η γραμμική ταχύτητα του λόγω της κυκλικής κίνησης του P, γύρω από το K.

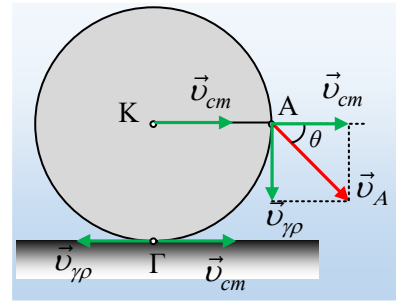


- i) Στο σχήμα (α), ο δίσκος εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από τον άξονά του ο οποίος περνά από το κέντρο του K. Ισοδύναμα η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι μηδενική, αφού σε κάθε άλλη περίπτωση η ταχύτητα του σημείου A, θα είχε και μια οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας. Εδώ η ταχύτητα του A είναι κατακόρυφη, άρα πρόκειται για γραμμική ταχύτητα λόγω της κυκλικής κίνησης του A, γύρω από το K.



- ii) Στην περίπτωση του σχήματος (β) αναλύουμε την ταχύτητα του σημείου A, σε δύο συνιστώσες.

Μια οριζόντια, η οποία είναι ίση με την ταχύτητα του κέντρου K, λόγω μεταφορικής κίνησης, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα θα είναι ίση με την γραμμική ταχύτητα του A. Αλλά αφού $\theta=45^\circ$, το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων είναι τετράγωνο και $v_{cm}=v_{\gamma\rho}$.



Αν τώρα έρθουμε στο σημείο Γ, επαφής του δίσκου με το οριζόντιο επίπεδο, θα έχει τις συνιστώσες ταχύτητες που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, οπότε η ταχύτητά του είναι ίση:

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{\gamma\rho} = 0 \quad (1)$$

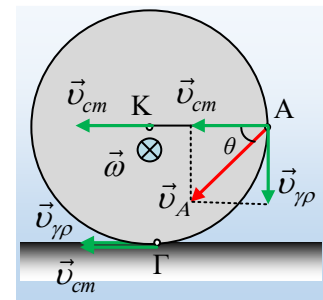
Αλλά τότε ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο.

Σημείωση: Η σχέση (1) γράφεται και ως:

$$v_{cm} - v_{\gamma\rho} = 0 \rightarrow v_{cm} = v_{\gamma\rho} = \omega R$$

εξίσωση που συνήθως θεωρείται ως η συνθήκη για την κύλιση. Πράγμα που δεν θεωρείται απαραίτητο, αφού μπορούμε να στηριχθούμε στο ότι είναι μηδενική η ταχύτητα του σημείου Γ.

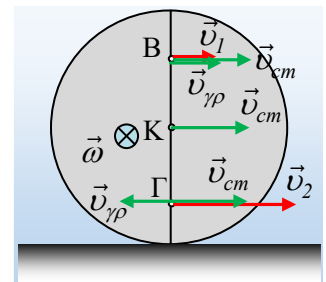
iii) Αναλύουμε επίσης την ταχύτητα του σημείου A, σύμφωνα με την παραπάνω λογική, παίρνοντας το διπλανό σχήμα. Αλλά τότε βλέπουμε ότι η ταχύτητα του κέντρου K, έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά, ενώ ο δίσκος στρέφεται δεξιόστροφα. Τότε όμως το σημείο Γ έχει και ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης και λόγω περιστροφικής κίνησης με κατεύθυνση προς τα αριστερά, οπότε η ταχύτητα του Γ είναι μη μηδενική με κατεύθυνση προς τα αριστερά και ο δίσκος δεν κυλιέται (περιστρέφεται και μεταφέρεται, αλλά δεν κυλιέται...)



iv) Ας εξετάσουμε αναλυτικά τις παρακάτω περιπτώσεις, ελέγχοντας τις ταχύτητες των σημείων B και Γ.

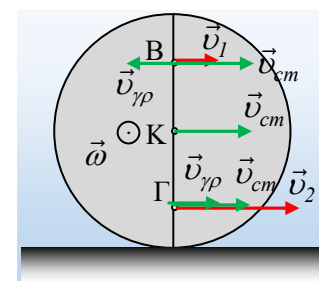
α) Αν ο δίσκος κινείται προς τα δεξιά και στρέφεται δεξιόστροφα.

Τότε το σημείο B θα έχει ταχύτητα $v_1 = v_{cm} + v_{\gamma\rho}$ ενώ το σημείο Γ ταχύτητα $v_2 = v_{cm} - v_{\gamma\rho}$. Με βάση τις σχέσεις αυτές θα πρέπει $v_B > v_{\Gamma}$, πράγμα που δεν συμβαίνει. Η πρόταση είναι λανθασμένη.



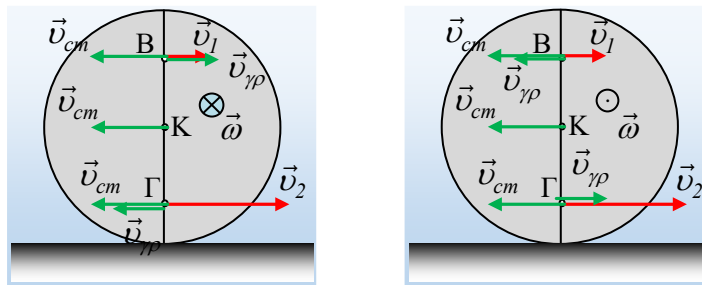
β) Έχει ταχύτητα v_{cm} προς τα δεξιά και στρέφεται αριστερόστροφα.

Στην περίπτωση αυτή $v_1 = v_{cm} - v_{\gamma\rho}$ ενώ το σημείο Γ ταχύτητα $v_2 = v_{cm} + v_{\gamma\rho}$. Οπότε τότε $v_2 > v_1$, συμβατό με τις δοθείσες τιμές. Η πρόταση μας δίνει ένα σωστό ενδεχόμενο.



γ) Κινείται προς τα αριστερά και στρέφεται δεξιόστροφα.

Στην περίπτωση αυτή, θα είχαμε το πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, από όπου προκύπτει ότι η ταχύτητα του σημείου Γ θα έπρεπε να έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και όχι προς τα δεξιά, όπως μας έχει δοθεί. Λάθος υπόθεση.



δ) Έχει ταχύτητα v_{cm} προς τα αριστερά και στρέφεται αριστερόστροφα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε το δεξιό από τα παραπάνω σχήματα. Αλλά τότε το σημείο B θα έπρεπε να έχει ταχύτητα προς τα αριστερά, που και πάλι δεν ισχύει. Επίσης λάθος ενδεχόμενο.

Με βάση τα παραπάνω, μόνο το β) ενδεχόμενο μπορεί να ισχύει. Ο δίσκος να έχει ταχύτητα v_{cm} προς τα δεξιά και στρέφεται αριστερόστροφα. Προφανώς στην περίπτωση αυτή ο δίσκος δεν κυλιέται...

dmargaris@gmail.com