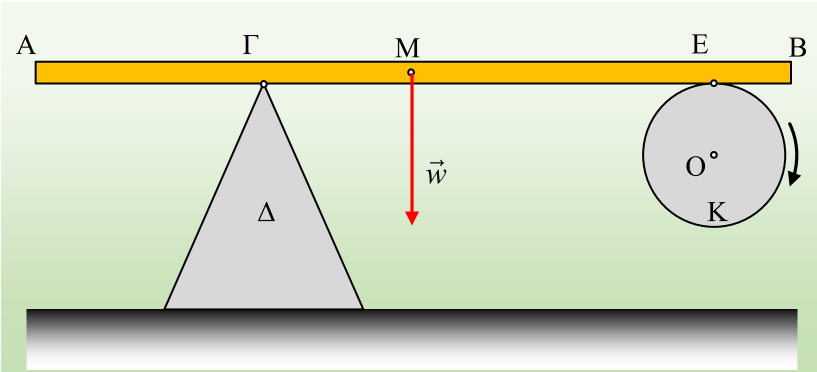
Οι τριβές εξασφαλίζουν την ισορροπία μιας δοκού.

Μια ομογενής δοκός ΑΒ, μήκους ℓ=5m και βάρους w= 300N, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, στηριζόμενη σε ένα τρίποδο Δ και έναν κύλινδρο. Ο κύλινδρος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που ταυτίζεται με τον άξονά του, ο οποίος περνά από το κέντρο Ο της βάσης του.



Ο κύλινδρος παραμένει ακίνητος ενώ για τα σημεία στήριξης δίνεται ότι (ΓΜ)=1m και (ΜΕ)=2m. Δίνεται ακόμη ότι η δοκός παρουσιάζει με το τρίποδο και τον κύλινδρο συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0{,}4$.

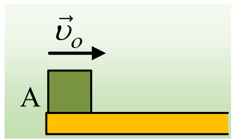
i) Να βρεθούν οι δυνάμεις που δέχεται η δοκός από τα δύο στηρίγματα.

ii) Θέτουμε τον κύλινδρο σε περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1=1rad/s, με φορά ίδια με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

α) Να βρεθούν οι δυνάμεις τριβής που θα ασκηθούν στην δοκό.

β) Πώς θα μεταβληθούν οι παραπάνω τριβές, αν διπλασιάσουμε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου;

iii) Με περιστρεφόμενο τον κύλινδρο, τοποθετούμε πάνω στη δοκό, στο άκρο της Α, ένα σώμα Σ μάζας m=6kg και σε μια στιγμή t=0, με κατάλληλο κτύπημα του προσδίδουμε αρχική ταχύτητα υ_0=4m/s, με αποτέλεσμα να κινηθεί κατά μήκος της δοκού, προς το άκρο Β. Αν ο σ.τ.ο. μεταξύ του σώματος Σ και της δοκού είναι μ=0,4:

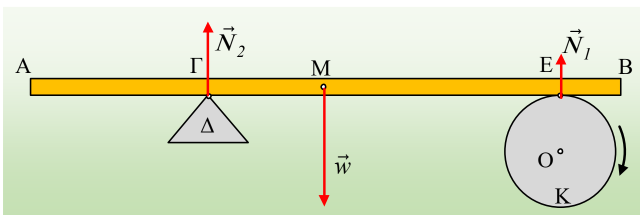


α) Να υπολογιστεί η τριβή που ασκείται στη δοκό από το τρίποδο τη στιγμή $t=0^+$ (αμέσως μετά το κτύπημα του Σ).

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της τριβής από το τρίποδο στη δοκό, σε συνάρτηση με την μετατόπιση x του σώματος Σ, πάνω στη δοκό.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Η δοκός δεν τείνει να κινηθεί προς τα δεξιά ή προς τ' αριστερά, οπότε δεν εμφανίζονται δυνάμεις τριβής από τα στηρίγματα, τα οποία απλά ασκούν στην δοκό κατακόρυφες δυνάμεις στήριξης N_1 και N_2, όπως στο σχήμα. Από την ισορροπία της δοκού παίρνουμε:

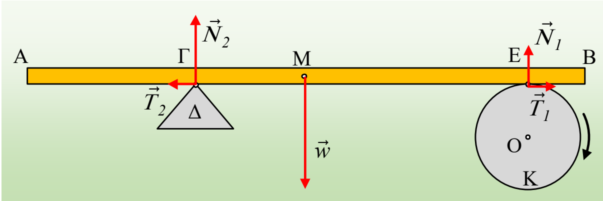
$$\Sigma F=0 \rightarrow N_1 + N_2=w \ (1) \ \textit{και}$$

$$\Sigma\tau_{\Gamma}=0 \rightarrow N_1\cdot(\Gamma E)-w\cdot(\Gamma M)=0 \rightarrow$$

$$N_1 = w\frac{(\Gamma M)}{(\Gamma E)} = 300N\frac{1m}{3m} = 100N \xrightarrow{(1)}$$

$$N_2 = w - N_1 = 300N - 100N = 200N$$

ii) Μόλις αρχίσει να περιστρέφεται ο κύλινδρος, θα δεχτεί δύναμη τριβής ολίσθησης με φορά προς τα αριστερά, αλλά τότε η αντίδρασή της T_1 θα έχει φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα, όπου τείνει να μεταφέρει προς τα δεξιά την δοκό. Αποτέλεσμα είναι να ασκηθεί στατική τριβή από το τρίποδο με φορά προς τα αριστερά.



α) Ξανά από την ισορροπία της δοκού (υποθέτουμε ότι αυτή ισορροπεί και η τριβή στο Γ είναι στατική), παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F=0 \rightarrow 0 \begin{cases} \Sigma F_y=0 \quad (1) \\ \Sigma F_x=0 \rightarrow T_1=T_2 \quad (3) \end{cases} \\ \Sigma\tau_{\Gamma}=0 \rightarrow N_1\cdot(\Gamma E)+T_1\cdot 0 -w\cdot(\Gamma M)+N_2\cdot 0+T_2\cdot 0=0 \ (2) \end{array}\right\} \begin{array}{c} N_1=100N,\ N_2=200N \\ \boxed{\begin{array}{c} T_2=T_1=\mu\cdot N_1\rightarrow \\ T_2=T_1=0,4\cdot 100N=40N \end{array}} \end{array}$$

Είναι σωστή η υπόθεσή μας για ισορροπία της δοκού; Είναι στατική η τριβή στο σημείο Γ; Ας υπολογίσουμε την οριακή τριβή που μπορεί να εμφανιστεί:

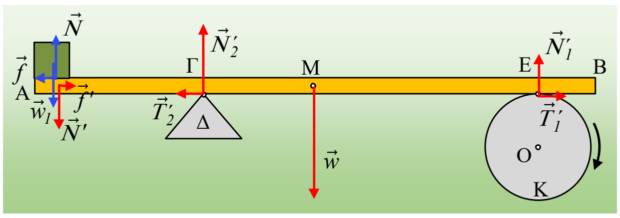
$$T_{2o\rho}=\mu_s\cdot N_2=0,4\cdot 200N=80N$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι για να εξασφαλιστεί η ισορροπία απαιτείται στατική τριβή μέτρου 40N, η οποία προφανώς μπορεί και να ασκηθεί. Άρα η δοκός ισορροπεί.

β) Η τριβή ολίσθησης T_1 που υπολογίσαμε παραπάνω έχει τιμή η οποία δεν εξαρτάται από την σχετική ταχύτητα μεταξύ των επιφανειών που τρίβονται. Έτσι είτε έχουμε γωνιακή ταχύτητα 1rad/s, είτε 2rad/s η τριβή ολίσθησης έχει το ίδιο μέτρο T_1=40N. Αλλά τότε και η στατική τριβή T_2 θα έχει επίσης μέτρο ξανά 40N. Δεν πρόκειται να αλλάξει κάτι.

iii) Μόλις τεθεί σε κίνηση (t_0=0) το σώμα Σ, θα ασκηθούν επάνω του οι δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί (με μπλε χρώμα), όπου f η τριβή ολίσθησης, μέτρου:

$$f=\mu\cdot N=\mu\cdot mg=0,4\cdot 6\cdot 10N=24N$$



Η αντίδρασή της f', καθώς και η αντίδραση της N, η N΄ μέτρου $N'=mg=60N$, ασκούνται στην δοκό, με κατευθύνσεις όπως στο σχήμα.

α) Θεωρώντας ότι η δοκός ισορροπεί ξανά, έχουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow 0 \begin{cases} \Sigma F_y=0 \rightarrow N_1'+N_2'=w+N' \ (4) \\ \Sigma F_x=0 \rightarrow T_1'+f'=T_2' \ \ (5) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau_\Gamma=0 \rightarrow N'\cdot(A\Gamma)+f'\cdot 0+ N_1'\cdot(\Gamma E)+T_1'\cdot 0 -w\cdot(\Gamma M)+N_2'\cdot 0+T_2'\cdot 0=0 \ (6) \xrightarrow{\text{αντικατάσταση}}$$

$$60\cdot 1{,}5+N_1'\cdot 3-300\cdot 1=0 \rightarrow N_1'=70N$$

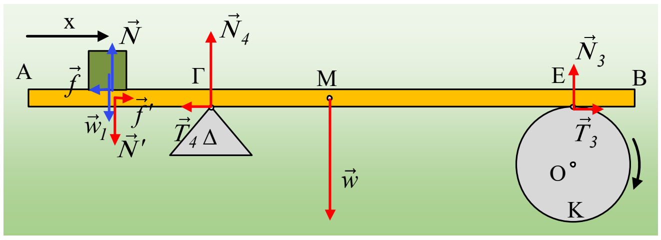
$$(4) \rightarrow 70N+N_2'=300N+60N \rightarrow \ N_2'= 290N$$

Αλλά τότε για τις τριβές θα έχουμε:

$$T_1'=\mu\cdot N_1' = 0{,}4\cdot 70N=28N \ \text{ και από (5) } \ T_2'=28N+24N=52N$$

Η παραπάνω τιμή της απαραίτητης για την ισορροπία τριβής, μπορεί να εμφανιστεί; Υπολογίζουμε την οριακή στατική τριβή, η οποία έχει μέτρο $T'_{2,o\rho} = \mu_s N'_2 = 0{,}4\cdot 290N = 116N >> 52N$. Συνεπώς πράγματι η δοκός ισορροπεί.

β) Έστω κάποια στιγμή t που το σώμα απέχει κατά x από το άκρο Α. Τότε η κατάσταση είναι ίδια με προηγούμενα, με μόνη διαφορά ότι έχει αλλάξει η ροπή της αντίδρασης Ν΄ ως προς το σημείο Γ. (προσοχή στην αλλαγή της αρίθμησης των δυνάμεων…)



Έτσι η εξίσωση (6) παίρνει τη μορφή:

$$\Sigma\tau_\Gamma=0 \rightarrow N'\cdot(A\Gamma-x)+f'\cdot 0+ N_3\cdot(\Gamma E)+T_3\cdot 0 -w\cdot(\Gamma M)+N_4\cdot 0+T_4\cdot 0=0 \rightarrow$$

$$60\cdot 1{,}5-60\cdot x+N_3\cdot 3-300\cdot 1=0 \rightarrow \ N_3 = 70+20x \quad (S.I.)$$

Αλλά τότε η τριβή ολίσθησης από τον κύλινδρο έχει μέτρο:

$$T_3 = \mu N_3 = 0{,}4\left(70+20x\right) = 28+8x \quad (S.I.)$$

Οπότε από την (5) βρίσκουμε για την στατική τριβή στο Γ:

$$T_4 = T_3 + f' = 28+8x+24 = 52+8x \quad (S.I.)$$

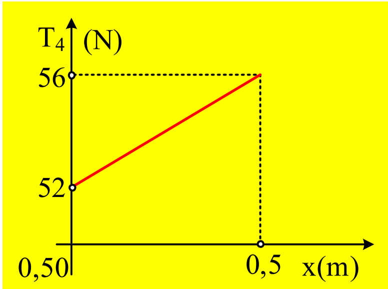
Για να βρούμε τι τιμές παίρνει το x, η μετατόπιση του σώματος Σ, μπορούμε να δουλέψουμε μελετώντας την επιβραδυνόμενη κίνησή του. Πράγματι το σώμα Σ θα κινηθεί με σταθερή επιτάχυνση:

$$\Sigma F=m\alpha \rightarrow -f=m\alpha \rightarrow \alpha=-4m/s^2, \text{ οπότε:}$$

$$\upsilon=\upsilon_o+\alpha t \quad \text{και} \quad x=\upsilon_o t+ \tfrac{1}{2}\, \alpha t^2$$

Τη στιγμή t_1 που σταματά $\upsilon=0 \rightarrow 0=2+(-4)t_1 \rightarrow t_1=0{,}5s$ και $x_{max}=2\cdot 0{,}5+ \tfrac{1}{2}(-4)\cdot 0{,}5^2=0{,}5m$.

Με βάση τα προηγούμενα, η ζητούμενη γραφική παράσταση παίρνει την μορφή:



Αξίζει να σημειωθεί ότι αμέσως μόλις μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος Σ η παραπάνω τριβή αποκτά σταθερό μέτρο:

$$T_{4,\tau\varepsilon\lambda} = T_3 + f' = 28 + 8x + 0 \xrightarrow{x=0,5m} T_{4,\tau\varepsilon\lambda} = 32N$$

Σχόλια:

- Μπορείτε να ελέγξετε την μη ολίσθηση του τροχού στο σημείο Γ;
- Αξίζει να προσεχθεί ότι η βαθμολόγηση το κατακόρυφου άξονα δεν ξεκίνησε από το μηδέν αλλά από το 50N, αφού η περιοχή τιμών που μας ενδιέφερε ήταν μεταξύ των 52N και 56N.

dmargaris@gmail.com