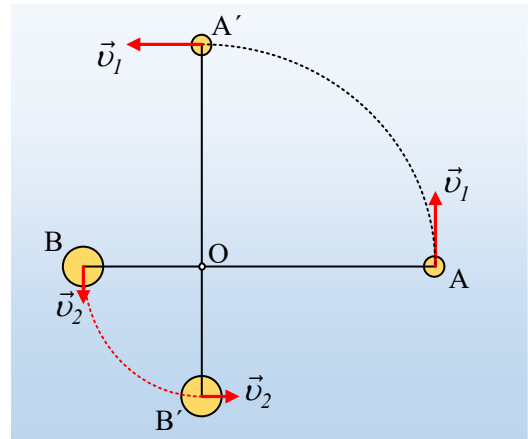


Δυο σφαίρες σε κυκλικές τροχιές

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο μικρές σφαίρες Α και Β δεμένες στα άκρα μη ελαστικού (και τεντωμένου) νήματος μήκους $\ell=1,2\text{m}$. Σε μια στιγμή $t_0=0$, κτυπάμε ταυτόχρονα τις δύο σφαίρες προσδίδοντάς τους οριζόντιες ταχύτητες με μέτρα $v_1=2\text{m/s}$ και $v_2=1\text{m/s}$, κάθετες προς το νήμα. Παρατηρούμε στη συνέχεια τις σφαίρες να εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση, σε τροχιές με κέντρο ένα (ελεύθερο) σημείο Ο του νήματος, ενώ το νήμα παραμένει διαρκώς τεντωμένο. Στο σχήμα, (σε κάτοψη) βλέπετε τις αρχικές θέσεις των δύο σφαιρών, καθώς και τις θέσεις τους μετά από $\frac{1}{4}$ της κοινής περιόδου περιφοράς τους.



- i) Να βρεθούν οι ακτίνες των κυκλικών τροχιών που διαγράφουν οι σφαίρες.
- ii) Αν $m_1=0,1\text{kg}$, να υπολογιστούν:
 - α) Η ορμή και ο (στιγμιαίος) ρυθμός μεταβολής της ορμής της Α σφαίρας, στην αρχική θέση.
 - β) Η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας, μέχρι η επιβατική ακτίνα να διαγράψει γωνία 90° , ερχόμενη στη θέση Α'.
 - γ) Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας Α, κατά την παραπάνω μετακίνησή της.
- iii) Αφού υπολογίσετε την μάζα της δεύτερης σφαίρας, να υπολογίσετε την ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών και το ρυθμό μεταβολής της ορμής, τη στιγμή $t_0=0^+$.

Απάντηση:

- i) Η ακτίνα τη Α σφαίρας είναι η $(OA)=r_1$, ενώ της Β η $(OB)=r_2$, ενώ οι σφαίρες εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητες v_1 και v_2 για τις οποίες έχουμε:

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T} \quad \text{και} \quad v_2 = \frac{2\pi R_2}{T}$$

Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

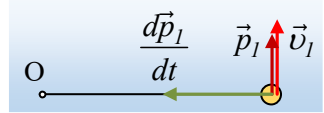
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\pi R_1 / T}{2\pi R_2 / T} = \frac{R_1}{R_2} \rightarrow$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{1} \rightarrow R_1 = 2R_2$$

$$\text{Όμως } R_1 + R_2 = \ell \rightarrow 2R_2 + R_2 = \ell \rightarrow R_2 = \frac{\ell}{3} = \frac{1,2\text{m}}{3} = 0,4\text{m} \rightarrow$$

$$R_1 = 0,8\text{m}$$

ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της ορμής και του ρυθμού μεταβολής της ορμής της σφαίρας A, τη στιγμή $t_0=0^+$.



α) Η αρχική ορμή της A σφαίρας, έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας v_1 και μέτρο:

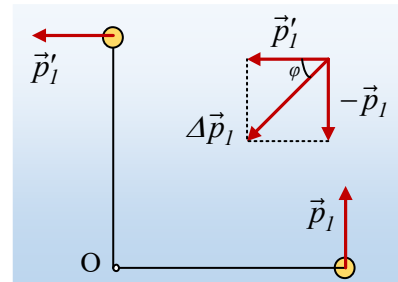
$$p_1 = mv_1 = 0,1 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s} = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)_{\sigma\tau} = \frac{dp_1}{dt} = \Sigma F = F_k = m_1 \frac{v_1^2}{R_1} = 0,1 \cdot \frac{2^2}{0,8} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Αφού η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα, είναι η κεντρομόλος δύναμη.

β) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της ορμής της A σφαίρας στις δύο θέσεις, όπου τα μέτρα τους είναι ίσα. Για την μεταβολή της ορμής της σφαίρας, έχουμε:



$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + (-\vec{p}_1)$$

Αλλά τότε το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής $\Delta \vec{p}_1$ προκύπτει με

την μέθοδο του παραλληλογράμμου, ως η διαγώνιος ενός τετραγώνου, με μέτρο:

$$\Delta p_1 = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}'_1|^2} = |\vec{p}_1| \sqrt{2} = 0,2\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\phi=45^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα.

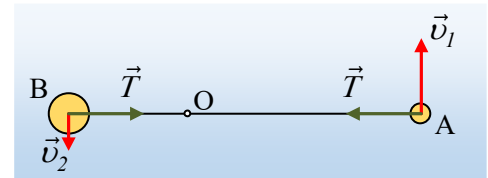
γ) Για την περίοδο των κυκλικών κινήσεων έχουμε:

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi R_1}{v_1} = \frac{2\pi \cdot 0,8}{2} \text{ s} = 0,8\pi \text{ s}$$

Οπότε ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής από $0 - \frac{1}{4} T$ έχει την κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής (γωνία ϕ με την οριζόντια διεύθυνση) και μέτρο:

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{\Delta p_1}{T/4} = \frac{4 \Delta p_1}{T} = \frac{4 \cdot 0,2\sqrt{2}}{0,8\pi} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

iii) Το νήμα ασκεί σε κάθε σφαίρα μια δύναμη που ονομάζουμε τάση του νήματος T, όπως στο σχήμα. Αλλά αυτή η τάση του νήματος «παίζει» και τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης για την κυκλική κίνηση, κάθε σφαίρας και παραπάνω βρήκαμε ότι το μέτρο της είναι:



$$F_k = m_1 \frac{v_1^2}{R_1} = 0,5 \text{ N}$$

Αλλά τότε και για την 2^η σφαίρα θα έχουμε:

$$T = F_k = m_2 \frac{v_2^2}{R_2} \rightarrow m_2 = \frac{F_k \cdot R_2}{v_2^2} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{1^2} \text{kg} = 0,2 \text{kg}$$

Οπότε η ολική ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών αμέσως μόλις αποκτήσουν τις παραπάνω ταχύτητες είναι:

$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}} p_{ολ} = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Και θεωρώντας θετική την ταχύτητα v_1 , με αντικατάσταση έχουμε:

$$p_{ολ} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,1 \cdot 2 \text{kgm/s} + 0,2(-1) \text{kgm/s} = 0$$

Ενώ και για το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος, θα έχουμε:

$$\frac{d\vec{p}_{ολ}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \Sigma \vec{F} = (\vec{w}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1) + (\vec{w}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2)$$

Όμως από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα κάθε σφαίρας θα έχουμε:

$$\vec{w}_1 + \vec{N}_1 = \vec{w}_2 + \vec{N}_2 = 0$$

Και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{d\vec{p}_{ολ}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

Αφού οι δύο τάσεις στις σφαίρες είναι αντίθετες.

Σχόλια.

- Προφανώς το παραπάνω σύστημα είναι μονωμένο, αφού η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Αλλά τότε η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή (και ίση με μηδέν!).
- **Για καθηγητές:** Το σημείο Ο, δεν είναι παρά το κέντρο μάζας του συστήματος, το οποίο παραμένει ακίνητο.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης