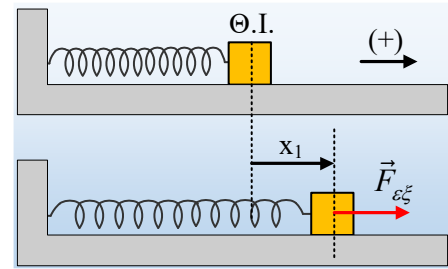


Εξαναγκασμένη ταλάντωση και ισχύς δυνάμεων.

Ένα σώμα μάζας $0,2\text{kg}$ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση εξωτερικής αρμονικής δύναμης, σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική και $t=0$ κάποια στιγμή που το σώμα, ενώ ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος, περνά από την θέση ισορροπίας, η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο παίρνει τη μορφή $x=0,5\cdot\eta\mu(10t)$ (S.I.). Στη διάρκεια της ταλάντωσης το σώμα δέχεται δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\pi}=-bv=-0,2\cdot v$ (μονάδες στο S.I.).



- i) Ξεκινώντας από την εξίσωση για το έργο δύναμης ($W=|F|\cdot|\Delta x|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$) και τον ορισμό της ισχύος ($P=\Delta W/\Delta t$), να αποδείξετε ότι η ισχύς της δύναμης απόσβεσης, δίνεται από την εξίσωση $P=-b\cdot v^2$.
- ii) Να υπολογίσετε την ισχύ της δύναμης απόσβεσης, κάποια στιγμή t_1 , που το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1=0,4\text{m}$, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση.
- iii) Αν το ελατήριο έχει σταθερά $k=25\text{N/m}$, να υπολογίσετε τη στιγμή t_1 :
 - α) Την επιτάχυνση του σώματος και την εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σώμα.
 - β) Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας του σώματος.
 - γ) Την ισχύ της εξωτερικής δύναμης F .

Απάντηση:

- i) Για την στιγμιαία ισχύ, μιας μεταβλητού μέτρου δύναμης, όπως η δύναμη απόσβεσης έχουμε:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{|F| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |F| \cdot \frac{|dx|}{dt} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = |F| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Οπότε για την δύναμη απόσβεσης θα έχουμε:

$$P_{F_{\alpha\pi}} = |F_{\alpha\pi}| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = |-bv| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -bv^2. (1)$$

- ii) Τη στιγμή t_1 που το σώμα περνά από την θέση $x_1=0,4\text{m}$, έχει ταχύτητα $v_1=A\omega\cdot\sigma\upsilon\nu(10t)=5\cdot\sigma\upsilon\nu(10t)$ (S.I.).

Οπότε θα έχουμε:

$$x = 0,5 \cdot \eta\mu(10t) \rightarrow \eta\mu(10t) = \frac{x_1}{0,5} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8$$

Ενώ για την ταχύτητα του σώματος:

$$v_1 = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t_1) = 5 \cdot \left(\pm \sqrt{1 - \eta\mu^2(10t_1)} \right) \rightarrow$$

$$v_1 = \pm 5 \sqrt{1 - 0,8^2} \text{ m/s} = \pm 5 \sqrt{0,36} \text{ m/s} = \pm 3 \text{ m/s}.$$

Αλλά αφού το σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση:

$$v_1 = -3 \text{ m/s}$$

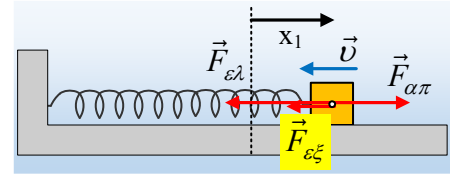
Οπότε από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$P_{F_{απ}} = -bv_l^2 = -0,2 \cdot 3^2 W = -1,8W$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα τη στιγμή t_1 , στην διεύθυνση της κίνησης, όπου:

$$F_{ελ} = -kx = -25 \cdot 0,4 N = -10 N \quad \text{και}$$

$$F_{απ} = -bv_l = -0,2 \cdot (-3) N = +0,6 N$$



α) Η επιτάχυνση του σώματος, δίνεται από την εξίσωση:

$$a = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(10t) = -\omega^2 x = -10^2 \cdot 0,4 m / s^2 = -40 m / s^2.$$

Οπότε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:

$$\Sigma F = ma \rightarrow F_{εξ} + F_{ελ} + F_{απ} = ma \xrightarrow{\text{αντικ}}$$

$$F_{εξ} - 10 N + 0,6 N = 0,2 \cdot (-40) N \rightarrow$$

$$F_{εξ} = 1,4 N$$

Η θετική αλγεβρική τιμή που προέκυψε, σημαίνει ότι η ασκούμενη εξωτερική δύναμη, έχει φορά προς τα δεξιά, αντίθετης φοράς από την ταχύτητα (και τη φορά που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα!!!).

β) Για το ρυθμό μεταβολής της δυναμική ενέργειας έχουμε:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{ελ}}}{dt} = -|F_{ελ}| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ = -|F_{ελ}| \cdot |v| = -10 \cdot 3 J / s = -30 J / s$$

Ενώ για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = P_{\Sigma F} = |\Sigma F| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ = |ma| \cdot |v| = 0,2 \cdot 40 \cdot 3 J / s = 24 J / s$$

γ) Για την ισχύ της εξωτερικής δύναμης έχουμε:

$$P_{F_{εξ}} = |F_{εξ}| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu \alpha = 1,4 \cdot 3 \cdot (-1) W = -4,2 W$$

Σχόλια:

- 1) Αξίζει να συγκρίνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα. Η δυναμική ενέργεια μειώνεται, μέσω του έργου της δύναμης επαναφοράς (εδώ δύναμη του ελατηρίου) κατά 30J/s. Από αυτά τα 30J/s, τα 24J/s προκαλούν αύξηση της κινητικής ενέργειας, ενώ τα υπόλοιπα 6J/s αφαιρούνται από το σώμα, τα 1,8J/s μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης και τα 4,2J/s, μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης!
- 2) Το ότι η εξωτερική δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σώμα, αναπληρώνοντας τις απώλειες που οφείλονται στις αποσβέσεις, είναι σωστό, αλλά αναφέρεται στην διάρκεια της περιόδου. Δεν σημαίνει ότι σε κάθε θέση και κάθε στιγμή ισχύει $P_{F_{εξ}} = -P_{F_{απ}}$! (Αυτό ισχύει κατ' εξαίρεση στην περίπτωση συντονισμού). Στην περίπτωση μας τη στιγμή t_1 η εξωτερική δύναμη αφαιρεί ενέργεια από το σώμα!

dmargaris@gmail.com