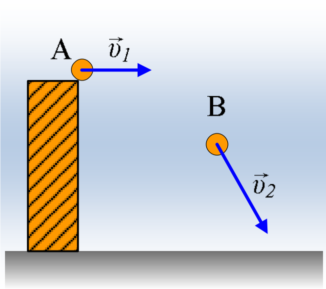
Η μεταβολή της ορμής και ο ρυθμός μεταβολής της

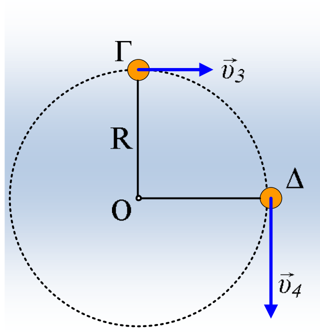
Μια μικρή σφαίρα μάζας m=0,5kg, εκτοξεύεται οριζόντια από τη θέση Α σε ορισμένο ύψος, με αρχική ταχύτητα $υ_1$ και μετά από χρονικό διάστημα Δt=1,2s, φτάνει στη θέση Β, έχοντας ταχύτητα $υ_2$, όπως στο σχήμα.



i) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας στις θέσεις Α και Β, καθώς και η μεταβολή της ορμής μεταξύ των δύο αυτών θέσεων.

ii) Αν $υ_1$=4m/s, να υπολογιστεί η ορμή της σφαίρας στις θέσεις Α και Β.

Η ίδια σφαίρα δένεται στο άκρο νήματος μήκους $\ell = 1m$ και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο, κέντρου Ο και ακτίνας $R=\ell$. Στο ανώτερο σημείο Γ της τροχιάς της, η σφαίρα έχει ταχύτητα $υ_3$=4m/s.



iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας στη θέση Δ, που το νήμα γίνεται οριζόντιο.

iv) Να βρεθούν:

α) Οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής της σφαίρας στις θέσεις Γ και Δ.

β) Η μεταβολή της ορμής μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων.

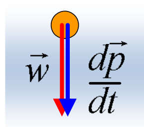
Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

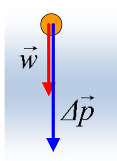
$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Αλλά κατά την κίνηση της σφαίρας, η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι το βάρος, μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη, οπότε στην κατακόρυφη διεύθυνση θα μεταβάλλεται και η ορμή της σφαίρας, με σταθερό ρυθμό:



$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_A = \left(\frac{dp}{dt}\right)_B = w = mg = 0,5 \cdot 10kg \cdot m/s^2 = 5kg \cdot m/s^2 .$$

Αλλά και από τον ίδιο νόμο, παίρνουμε για τη μεταβολή της ορμής:



$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{w} \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$\Delta p = mg \cdot \Delta t = 0,5 \cdot 10 \cdot 1,2kgm/s = 6kgm/s.$$

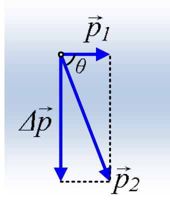
Με κατακόρυφη διεύθυνση, ίδια με την κατεύθυνση του βάρους.

ii) Η ορμή στη θέση Α έχει οριζόντια κατεύθυνση (ίδια με την ταχύτητα) και μέτρο:

$$p_A = m \cdot υ_1 = 0,5 \cdot 4\ kg \cdot m/s = 2\ kg \cdot m/s.$$

Η μεταβολή της ορμής που υπολογίσαμε παραπάνω, είναι ίση:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 = \Delta\vec{p} + \vec{p}_1$$



Παρατηρούμε ότι η ορμή στη θέση Β, είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της αρχικής ορμής p_1 και της μεταβολής της ορμής Δp μεταξύ των δύο θέσεων, όπως στο διπλανό σχήμα. Από το Π.Θ. παίρνουμε για το μέτρο της:

$$p_2 = \sqrt{(\Delta p)^2 + (p_1)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2}\, kg \cdot m/s = 2\sqrt{10}\, kg \cdot m/s.$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση (κατεύθυνση της ορμής στο Α) γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\Delta p}{p_1} = \frac{6}{2} = 3$$

Σημείωση:

Βέβαια θα μπορούσαμε να θυμηθούμε και τη θεωρία της οριζόντιας βολής, όπου θεωρώντας την κίνηση ως σύνθετη, η ταχύτητα (άρα και η ορμή) στην οριζόντια διεύθυνση παραμένει σταθερή, ενώ στην κατακόρυφη διεύθυνση το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, οπότε σε χρόνο Δt αποκτά ταχύτητα:

$\upsilon_y = g \cdot \Delta t = 10 \cdot 1,2 m/s = 12 m/s$, συνεπώς και ορμή μέτρου $p_y = m \cdot \upsilon_y = 0,5 \cdot 12 kg \cdot m/s = 6\ kg \cdot m/s$.

Οπότε από κει και πέρα, συνεχίζουμε όπως παραπάνω…

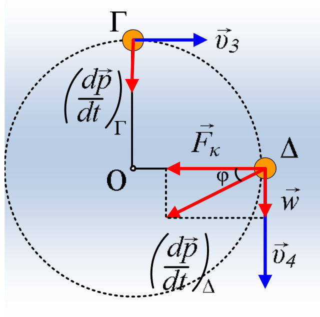
iii) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Γ και Δ, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Δ, ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας:

$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m\upsilon_3^2 + mgR = \frac{1}{2} m\upsilon_4^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_4 = \sqrt{\upsilon_3^2 + 2g\ell} = \sqrt{4^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1}\, m/s = 6 m/s$$

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής σε μια θέση, είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη, στη θέση αυτή.



α) Για την θέση Γ:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_\Gamma = \Sigma F = m\frac{\upsilon_3^2}{R} = 0,5 \cdot \frac{4^2}{1} kg \cdot m^2/s = 8 kg \cdot m^2/s.$$

Με κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω.

Ενώ αντίστοιχα για τη θέση Δ:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_\Delta = \Sigma\vec{F}_\Delta$$

Όπου

$$\Sigma\vec{F}_{\Delta} = \vec{w} + \vec{F}_k$$

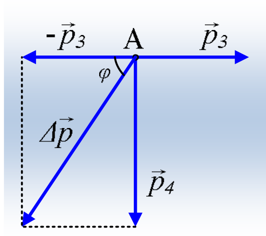
Ενώ $F_\kappa = m\dfrac{\upsilon_4^2}{R} = 0,5\cdot\dfrac{6^2}{1}kg\cdot m^2 / s = 18N$.

Με οριζόντια διεύθυνση και φορά προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\Delta} = \Sigma F = \sqrt{w^2 + F_\kappa^2} = \sqrt{(0,5\cdot 10)^2 + 18^2}N \approx 18,7kg\cdot m / s^2.$$

Ενώ $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{w}{F_k} = \dfrac{5}{18}$

β) Για την μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων Γ και Δ έχουμε:



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_4 - \vec{p}_3 = \vec{p}_4 + \left(-\vec{p}_3\right)$$

Όπου:

$p_3 = m\upsilon_3 = 0,5\cdot 4kg\cdot m/s = 2kg\cdot m/s$ και

$p_4 = m\upsilon_4 = 0,5\cdot 6\ kg\cdot m/s = 3\ kg\cdot m/s$, οπότε:

$$\Delta p = \sqrt{\left(p_3\right)^2 + \left(p_4\right)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2}kg\cdot m / s = \sqrt{13}kg\cdot m / s.$$

Ενώ το διάνυσμα $\Delta\vec{p}$ σχηματίζει με το διάνυσμα $-\vec{p}_3$ γωνία φ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{p_4}{p_3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Σχόλιο:

Στη κυκλική κίνηση η κεντρομόλος δύναμη δεν παραμένει σταθερή, οπότε δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της ορμής, όπως το κάναμε στο ερώτημα i), αφού η εξίσωση:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Οδηγεί στην $\Delta\vec{p} = \Sigma\vec{F}\cdot\Delta t \rightarrow$ μόνο όταν η δύναμη $\left(\Sigma\vec{F}\right)$ παραμένει σταθερή (μέτρο και κατεύθυνση.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης