Μια σύνθεση ταλαντώσεων ή μια ααt;

Ένα σώμα μάζας 0,5kg ταλαντώνεται σε ευθεία γραμμή, με εξίσωση απομάκρυνσης από μια θέση x=0:

$$x = 0,2\sqrt{3}\cdot \eta\mu(4\pi t)+0,2\cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi t) \quad (S.I)$$

i) Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, της μορφής x=A·ημ(ωt+θ) και να υπολογίστε το πλάτος και την αρχική φάση της απομάκρυνσης.

ii) Αν η παραπάνω κίνηση είναι ΑΑΤ, να βρείτε την σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης και τη μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

iii) Τη χρονική στιγμή t_1=1,25s να υπολογιστούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.

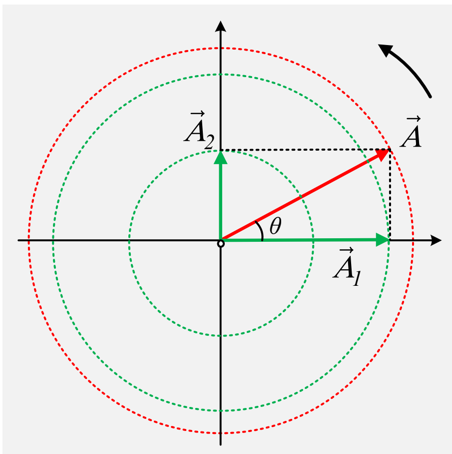
iv) Αν τη στιγμή t_1 το σώμα μας συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ένα δεύτερο σώμα μάζας M=1kg οπότε στη συνέχεια έχουμε μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με νέο πλάτος A_1=0,2m, να υπολογιστεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας η οποία οφείλεται στην κρούση.

Απάντηση:

i) Η εξίσωση της απομάκρυνσης που μας δίνεται, γράφεται:

$$x = 0,2\sqrt{3}\cdot \eta\mu(4\pi t)+0,2\cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi t) = 0,2\sqrt{3}\cdot \eta\mu(4\pi t)+0,2\cdot \eta\mu\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας x=0, με πλάτη $0,2\sqrt{3}m$ και $0,2m$, την ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega=4\pi\ rad/s$ και διαφορά φάσης $\varphi=\frac{\pi}{2}rad$. Αλλά τότε (και με την βοήθεια των περιστρεφομένων διανυσμάτων του σχήματος) θα έχουμε ότι η σύνθεση των δύο αυτών ταλαντώσεων, θα μας δώσει μια νέα αρμονική ταλάντωση, της ίδιας συχνότητας και πλάτους



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{\left(0,2\sqrt{3}\right)^2+0,2^2}\,m=\sqrt{0,2^2\cdot 4}\,m=0,4m$$

Ενώ για την αρχική φάση θ, ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2}{A_1}=\frac{0,2}{0,2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}rad$

Αλλά τότε η εξίσωση της απομάκρυνσης παίρνει τη μορφή:

$$x=0,4\cdot\eta\mu\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right) \quad (S.I.)$$

ii) Η σταθερά επαναφοράς της παραπάνω αατ είναι ίση:

$$D = m\omega^2 = 0,5 \cdot (4\pi)^2 N/m = 80N/m$$

Ενώ η μέγιστη δυναμική ενέργεια του σώματος, ίση με την ενέργεια ταλάντωσης, είναι:

$$U_{max} = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}80 \cdot (0,4)^2 J = 6,4J$$

iii) Τη στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση x_1:

$$x_1 = 0,4 \cdot \eta\mu\left(4\pi t_1 + \frac{\pi}{6}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(4\pi \cdot 1,25 + \frac{\pi}{6}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$$

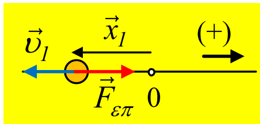
$$x_1 = 0,4 \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 0,4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)m = -0,2m$$

Έχοντας ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(4\pi t_1 + \frac{\pi}{6}\right) = 0,4 \cdot 4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 1,6\pi \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)m/s = -0,8\sqrt{3}\pi \ m/s \approx -4,4m/s$$

Με βάση τις τιμές αυτές, έχουμε:



α) Για το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{dp}{dt} = -Dx_1 = -80 \cdot (-0,2)kg \cdot m/s^2 = -16kg \cdot m/s^2.$$

β) Ενώ για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = |-Dx_1| \cdot |\upsilon_1| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -|-Dx_1| \cdot |\upsilon_1| = -16 \cdot 4,4J/s \approx -70J/s$$

iv) Με βάση τα παραπάνω, τη στιγμή t_1 το σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση και συγκρούεται πλαστικά στη θέση x_1=-0,2m, ενώ μετά την κρούση το πλάτος ταλάντωσης θα είναι 0,2m. Αυτό σημαίνει ότι μετά την κρούση θα έχει στιγμιαία μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, βρίσκουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow m\upsilon_1 + Mu = 0 \rightarrow$$

$$u = -\frac{m\upsilon_1}{M} = -\frac{0,5 \cdot (-4,4)}{1} m/s = 2,2m/s$$

Το σώμα μάζας M δηλαδή, πριν την κρούση κινείται στη διεύθυνση x, προς την θετική κατεύθυνση, αντίθετα από το σώμα μάζας m.

Αλλά τότε η απώλεια της μηχανικής ενέργειας στη διάρκεια της κρούσης θα είναι:

$$\Delta K = K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau} = \left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Mu^2\right) - 0 \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}0,5 \cdot 4,4^2\,J + \frac{1}{2}1 \cdot 2,2^2\,J = 4,84J + 2,42J = 7,26\,J$$

dmargaris@gmail.com