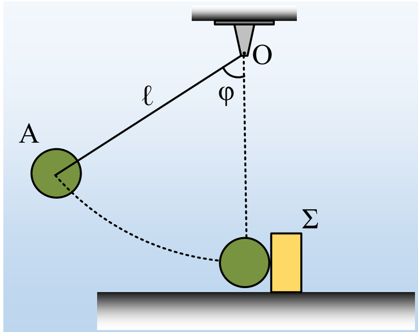
Ένας συνδυασμός κυκλικής και ορμής

Η σφαίρα του σχήματος, μάζας m_1=3kg, ισορροπεί δεμένη στο άκρο μη ελαστικού κατακόρυφου νήματος μήκους ℓ=2m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Ο, σε επαφή με σώμα Σ, μάζας m_2=1kg, το οποίο παρουσιάζει με το οριζόντιο επίπεδο συντελεστή τριβής μ=0,3. Εκτρέπουμε τη σφαίρα, φέρνοντάς την στη θέση Α, όπου το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία φ (ημφ=0,8 και συνφ=0,6) και την αφήνουμε να κινηθεί.



i) Ποια η αρχική επιτάχυνση της σφαίρας στη θέση Α, μόλις αφεθεί να κινηθεί;

ii) Να βρεθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας, τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο, ελάχιστα πριν την σύγκρουσή της με το σώμα Σ.

iii) Αν το σώμα Σ, μετά την κρούση διανύει απόσταση 6m στο οριζόντιο επίπεδο, μέχρι να σταματήσει, να βρεθεί η ενέργεια που κέρδισε στη διάρκεια της κρούσης.

iv) Η σφαίρα μετά την κρούση, θα εκτραπεί προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά; Ποιο το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει;

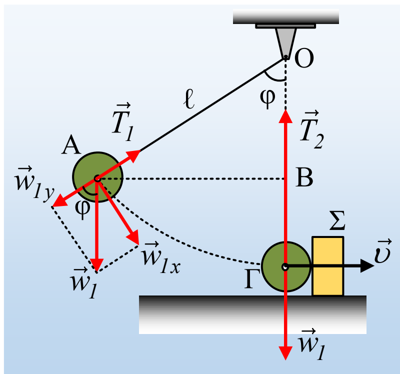
v) Κατά την παραπάνω κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων είχαμε απώλεια μηχανικής ενέργειας ή όχι;

g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, στη θέση Α, μόλις αφεθεί ελεύθερη να κινηθεί. Στην διεύθυνση του νήματος η σφαίρα ισορροπεί οπότε $T_1=w_y$. Στην κάθετη διεύθυνση, στη διεύθυνσης της εφαπτόμενης της τροχιάς που θα ακολουθήσει, έχουμε:

$$\Sigma F_x = m_1 a_x \rightarrow m_1 g\eta\mu\varphi = m_1 a \rightarrow$$
$$a = g\eta\mu\varphi = 10\cdot 0{,}8 m/s^2 = 8m/s^2.$$



ii) Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης Α και την κατώτερη θέση Γ, ελάχιστα πριν την κρούση, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την δεύτερη, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$
$$0 + m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 + 0 \xrightarrow{h=(O\Gamma)=\ell-\ell\sigma\upsilon\nu\varphi}$$
$$\upsilon = \sqrt{2g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 2(1-0{,}6)}m/s = 4m/s$$

Αλλά τότε η σφαίρα, ελάχιστα πριν την κρούση, έχει ορμή οριζόντια, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα υ και μέτρο:

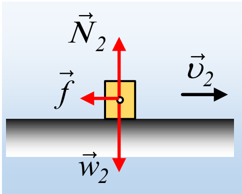
$$p_1 = m_1 \upsilon = 3 \cdot 4 kg \cdot m/s = 12\ kg \cdot m/s$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας, έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, κατακόρυφη, με μέτρο:

$$\frac{dp_1}{dt} = \Sigma F = T_2 - m_1 g = m_1 \frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow$$

$$\frac{dp_1}{dt} = m_1 \frac{\upsilon^2}{R} = 3\frac{4^2}{2} kg \cdot m/s^2 = 24 kg \cdot m/s^2$$

iii) Έστω υ_2 η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Σ, αμέσως μετά την κρούση. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, μέχρι να σταματήσει, όπου $N_2=w_2$, ενώ η τριβή $f=\mu N_2=\mu m_2 g$. Εφαρμόζουμε για το διάστημα της κίνησης του σώματος Σ, μέχρι να σταματήσει σε απόσταση 6m το ΘΜΚΕ και παίρνουμε:



$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_2} + W_{N_2} + W_f \rightarrow$$
$$0 - K_{\alpha\rho\chi} = 0 + 0 - f \cdot x \rightarrow$$
$$K_{\alpha\rho\chi} = K_2 = \mu m_2 g \cdot x = 0,3 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 6J = 18J$$

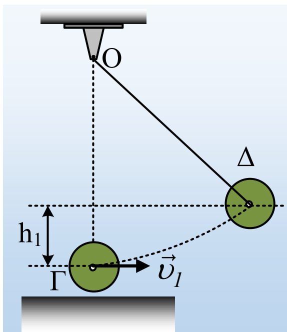
iv) Η παραπάνω κινητική ενέργεια που απέκτησε το Σ, στη διάρκεια της κρούσης είναι ίση:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 18}{1}} m/s = 6m/s$$

Αλλά τότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, με θετική φορά προς τα δεξιά, παίρνουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow m_1 \upsilon + 0 = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 \rightarrow$$
$$3 \cdot 4 = 3\upsilon_1 + 1 \cdot 6 \quad (S.I.) \rightarrow \upsilon_1 = 2m/s$$

Η θετική τιμή για την ταχύτητα υ_1 που υπολογίσαμε, μας λέει ότι αυτή έχει φορά προς τα δεξιά, οπότε προς τα δεξιά θα εκτραπεί και το νήμα, φτάνοντας το σώμα σε μέγιστο ύψος h_1, όπως στο σχήμα.



Εφαρμόζοντας ξανά την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Γ (αμέσως μετά την κρούση) και Δ (στο μέγιστο ύψος h_1) παίρνουμε:

$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta \rightarrow$$
$$\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + 0 = 0 + m_1 g h_1 \rightarrow$$
$$h_1 = \frac{\upsilon_1^2}{2g} = \frac{2^2}{2 \cdot 10} m = 0,2m$$

v) Θεωρώντας την δυναμική ενέργεια μηδενική στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση Γ, οι ενέργειες που μας ενδιαφέρουν είναι οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση.

Πριν την κρούση:

$$K_{πριν} = K_σ = \frac{1}{2} m_1 υ^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 4^2 J = 24J$$

Μετά την κρούση:

$$K_{μετά} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_2^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 2^2 J + \frac{1}{2} 1 \cdot 6^2 J = 24J$$

Βλέπουμε δηλαδή, ότι η ενέργεια διατηρήθηκε και δεν είχαμε απώλεια μηχανικής ενέργειας, κατά την παραπάνω κρούση.

Σχόλιο.

- Η παραπάνω κρούση, κατά την οποία διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται, ονομάζεται ελαστική κρούση.
- Παραπάνω πήραμε ότι $U_Γ=0$. Στην πραγματικότητα όμως δεν μας ενδιαφέρει πόση είναι η δυναμική ενέργεια των σωμάτων στη θέση της κρούσης. Δεχόμενοι ότι η κρούση διαρκεί απειροελάχιστα, τα σώματα δεν μετατοπίζονται σημαντικά στη διάρκειά της, οπότε η ενέργεια που μπορεί να μεταφερθεί από το ένα σώμα στο άλλο και μας ενδιαφέρει η διατήρησή της ή μη, είναι η κινητική ενέργεια των σωμάτων.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης