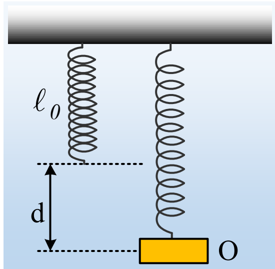
Μια ακόμη φθίνουσα ταλάντωση

Ένα σώμα μάζας m=4kg ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, στη θέση Ο, επιμηκύνοντας το ελατήριο κατά d=0,4m. Ασκώντας κατάλληλη κατακόρυφη δύναμη F, ανεβάζουμε το σώμα, φέρνοντάς το στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και τη στιγμή $t_0=0$ το αφήνουμε να ταλαντωθεί. Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, με την επίδραση δύναμης απόσβεσης της μορφής $F_{απ}=-0,4\cdot υ$.



i) Να υπολογιστεί η αρχική ενέργεια ταλάντωσης.

Κάποια στιγμή t_1 το σώμα κινείται προς τα κάτω, έχοντας ταχύτητα μέτρου 1m/s και το ελατήριο έχει επιμήκυνση Δℓ=0,5m. Για την στιγμή αυτή να βρεθούν:

ii) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

iii) Το έργο της δύναμης απόσβεσης από t_0 έως τη στιγμή t_1.

iv) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής α) της κινητικής ενέργειας και β) της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης. Να σχολιάστε τα αποτελέσματα.

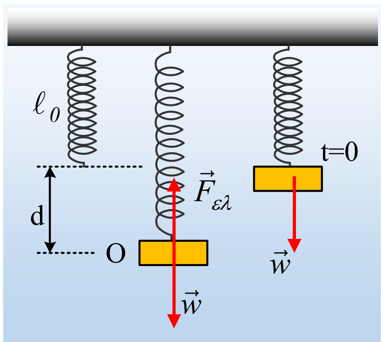
Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας Ο. Από την συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow |F_{ελ}| = mg \rightarrow k\Delta\ell = mg \rightarrow$$

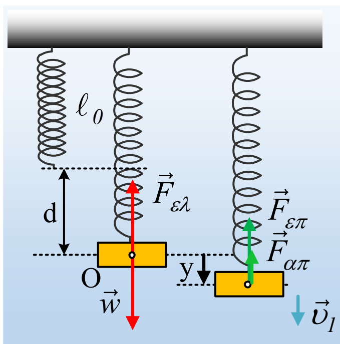
$$k = \frac{mg}{\Delta\ell} = \frac{mg}{d} = \frac{4\cdot 10}{0,4} N/m = 100N/m$$



Αλλά αν το σώμα αφήνεται να κινηθεί από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, αυτή θα είναι η αρχική ακραία θέση της ταλάντωσης, συνεπώς A_0=d=0,4m και η αρχική ενέργεια ταλάντωσης θα είναι ίση:

$$E_0 = \frac{1}{2}DA_0^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}100\cdot 0,4^2 J = 8J$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται κάτω από την θέση ισορροπίας σε απομάκρυνση $y_1=\Delta\ell-d=0,1m$ και στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί η δύναμη επαναφοράς $F_{επ}=-ky$ και η δύναμη απόσβεσης $F_{απ}=-bυ$ και οι δύο με φορά προς τα πάνω.



ii) Για την κινητική ενέργεια του σώματος έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2}mυ_1^2 = \frac{1}{2}4\cdot 1^2 J = 2J$$

Ενώ για την δυναμική ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$U_1 = \frac{1}{2}ky_1^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0{,}1^2\,J = 0{,}5J$$

iii) Με βάση τις παραπάνω τιμές, η ενέργεια ταλάντωσης την στιγμή t_1 είναι ίση:

$$E_1 = K_1 + U_1 = 2J + 0{,}5J = 2{,}5J$$

Αλλά τότε έχουμε μείωση της ενέργειας ταλάντωσης (ενέργεια που εμφανίζεται με την μορφή της θερμικής ενέργειας, αύξηση της εσωτερικής ενέργειας αέρα και συστήματος…) κατά:

$$\Delta E = E_0 - E_1 = 8J - 2{,}5J = 5{,}5J.$$

Η ενέργεια αυτή αφαιρέθηκε από το ταλαντούμενο σώμα, μέσω της (μη συντηρητικής…) δύναμης απόσβεσης. Οπότε το έργο της δύναμης αυτής θα είναι ίσο:

$$W_{F_{\alpha\pi}} = -5{,}5J$$

iv) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης συνδέεται με το έργο της δύναμης επαναφοράς, οπότε για το ρυθμό μεταβολής της, θα έχουμε:

$$W_{F_{\varepsilon\pi}} = -\Delta U \rightarrow \frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -\frac{dU}{dt} \rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |dy| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = |ky_1| \cdot |\upsilon_1| = 100 \cdot 0{,}1 \cdot 1J/s = 10J/s$$

Αντίθετα η κινητική ενέργεια συνδέεται με την συνισταμένη δύναμη, αφού:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dy| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -|ky_1 + b\upsilon_1| \cdot |\upsilon_1| = -(100 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 1) \cdot 1J/s = -10{,}4J/s$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η κινητική ενέργεια μειώνεται κατά 10,4J/s, ενώ η δυναμική ενέργεια αυξάνεται κατά 10J/s. Τι γίνεται με τα 0,4J/s; Αρκεί να βρούμε την ισχύ της δύναμης απόσβεσης, η οποία είναι ίση με:

$$P_{F_{\alpha\pi}} = -|b\upsilon| \cdot |\upsilon| = -b\upsilon^2 = -0{,}4 \cdot 1^2\,J/s = -0{,}4J/s$$

Βλέπουμε ότι η δύναμη απόσβεσης αφαιρεί τα 0,4J/s μειώνοντας την ενέργεια ταλάντωσης.

Σχόλιο:

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η δύναμη επαναφοράς είναι συντηρητική δύναμη, ενώ η δύναμη απόσβεσης όχι, θα μπορούσαμε να απαντήσουμε στο iii) ερώτημα χρησιμοποιώντας το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της αρχικής θέσης και της θέσης τη στιγμή t_1, όπου προφανώς δεν γνωρίζουμε την μετατόπιση (ούτε πόσες ταλαντώσεις στο μεταξύ έχει κάνει το σώμα).

Πληροφορίες όμως που δεν μας χρειάζονται, αφού θα έχουμε:

$$K_1 - K_0 = W_{F_{\varepsilon\pi}} + W_{F_{\alpha\pi}} \rightarrow$$

$$K_1 - 0 = \left(U_0 - U_1\right) + W_{F_{\alpha\pi}} \rightarrow W_{F_{\alpha\pi}} = K_1 - \left(\frac{1}{2}kA_0^2 - \frac{1}{2}ky_1^2\right) \rightarrow$$

$$W_{F_{\alpha\pi}} = 2J - 8J + 0,5J = -5,5J$$

dmargaris@gmail.com