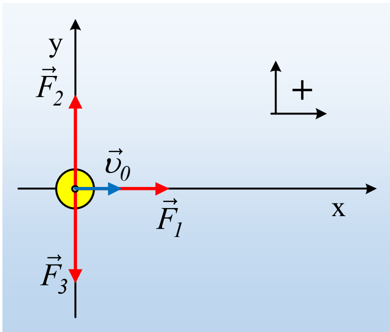
Τρεις δυνάμεις, τρεις κινήσεις



Ένα σώμα μάζας m=2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά μήκος ενός άξονα x με ταχύτητα υ_0=2m/s και τη στιγμή t=0 φτάνει σε ένα σημείο Ο, το οποίο λαμβάνουμε ως αρχή των οριζοντίων ορθογωνίων αξόνων x, y, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Στη θέση αυτή μπορεί να δεχτεί την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης, σε τρεις διαφορετικές εκδοχές.

Α) Σταθερή δύναμη όπως η F_1=2N, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα υ_0.

Β) Σταθερή δύναμη στην διεύθυνση y, όπως η F_2 μέτρου 2N, κάθετη στην αρχική ταχύτητα υ_0.

Γ) Δύναμη σταθερού μέτρου F_3=2N, η οποία διατηρείται διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα του σώματος

a) Για τη στιγμή t_1=2s, να βρεθούν και για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις:

i) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

ii) Η θέση του σώματος.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος στην διεύθυνση x, από 0-2s.

b) Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις x=x(t) για την τετμημένη του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και για τις τρεις περιπτώσεις, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2=15 s.

Απάντηση:

Το σώμα, σε κάθε περίπτωση, θα αποκτήσει επιτάχυνση στην διεύθυνση της ασκούμενης δύναμης, με μέτρο:

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{2}{2} m/s^2 = 1 m/s^2 .$$

Με βάση την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή και σε συνδυασμό με την επιτάχυνση που αποκτά, το σώμα:

a) Στην Α) περίπτωση, το σώμα θα κινηθεί ευθύγραμμα, κατά μήκος του άξονα x, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία ισχύον οι εξισώσεις:

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha t \quad (1) \qquad x_1 = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2)$$

Στην Β) περίπτωση το σώμα θα έχει σταθερή επιτάχυνση στην διεύθυνση του άξονα y, αλλά τότε με βάση την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του σώματος, θα έχουμε:

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_{x2}=\upsilon_o$ (3)	$\upsilon_{y2}=\alpha\, t$ (5)
$x_2= \upsilon_o t$ (4)	$y_2= \frac{1}{2}\, \alpha \cdot t^2$ (6)

Στην Γ) περίπτωση η δύναμη παραμένει διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα, άρα πρόκειται για κεντρομόλο δύναμη, η οποία μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας και όχι το μέτρο της, συνεπώς το σώμα θα εκτελέσει μια ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα:

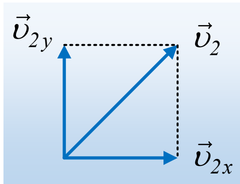
$$F=\frac{m\upsilon^2}{R}\rightarrow R=\frac{m\upsilon^2}{F}=\frac{2\cdot 2^2}{2}m=4m$$

i) Για το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, με βάση τα παραπάνω:

- Στην Α) περίπτωση:

$$\upsilon_1=\upsilon_0+\alpha t=2m/s+1\cdot 2m/s=4m/s$$

- Στην Β) περίπτωση από τις εξισώσεις (3) και (5) παίρνουμε:

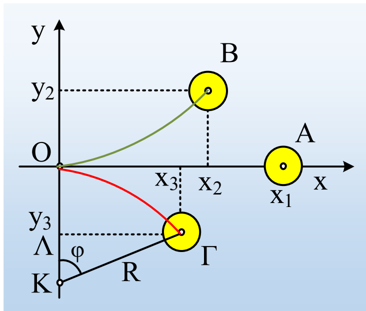


$$\upsilon_{2x}=\upsilon_0=2m/s \text{ και } \upsilon_{y2}=\alpha\cdot t=1\cdot 2m/s = 2m/s.$$

$$\upsilon_2=\sqrt{\upsilon_{x2}^2+\upsilon_{y2}^2}=\sqrt{2^2+2^2}m/s=2\sqrt{2}m/s$$

- Στην περίπτωση Γ) το μέτρο της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται, οπότε υ_3=2m/s.

ii) Για την θέση του σώματος θα έχουμε:



- Στην Α) περίπτωση:

$$x_1=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}at^2=2\cdot 2m+\frac{1}{2}1\cdot 2^2m=6m$$

- Στην Β) περίπτωση από τις εξισώσεις (4) και (6) παίρνουμε:

$$x_2=\upsilon_0 t=2\cdot 2m=4m$$

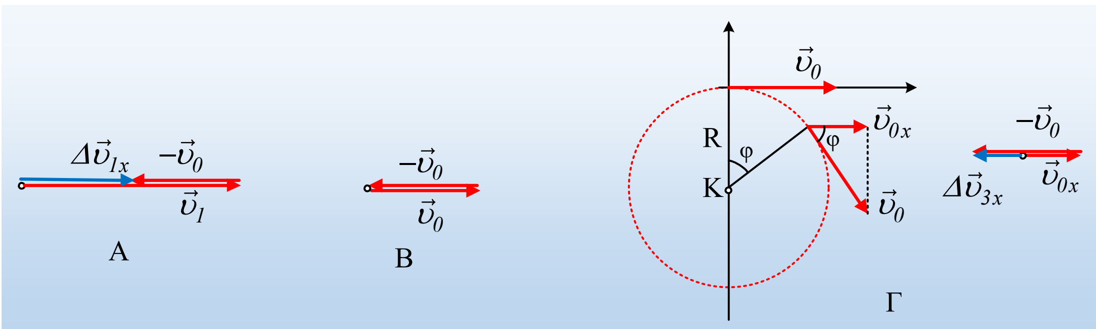
$$y_2=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}1\cdot 2^2m=2m$$

- Στην περίπτωση Γ) το σώμα θα διαγράψει κυκλική τροχιά (κόκκινη γραμμή), με ακτίνα R=4m και κέντρο το σημείο Κ, πάνω στον άξονα y, με y_K=-4m, διαγράφοντας τόξο μήκους:

$$s=\upsilon_0 t=2\cdot 2m=4m$$

Έχοντας διαγράψει επίκεντρη γωνία $\varphi=\omega t=\frac{\upsilon_0}{R}t=\frac{1}{2}t$ $(S.I.)$ και με αντικατάσταση t=2s, παίρνουμε φ_1= ½ ·2 rad=1rad.

iii) Για την μεταβολή της ταχύτητας στην διεύθυνση x, θα έχουμε με βάση το παρακάτω σχήμα:



$$\Delta\vec{\upsilon}_x=\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda,x}-\vec{\upsilon}_0=\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda,x}+(-\vec{\upsilon}_0)\rightarrow$$

$$A): \quad \Delta\upsilon_1 = \upsilon_{1,\tau} - \upsilon_0 = 4m/s - 2m/s = 2m/s$$

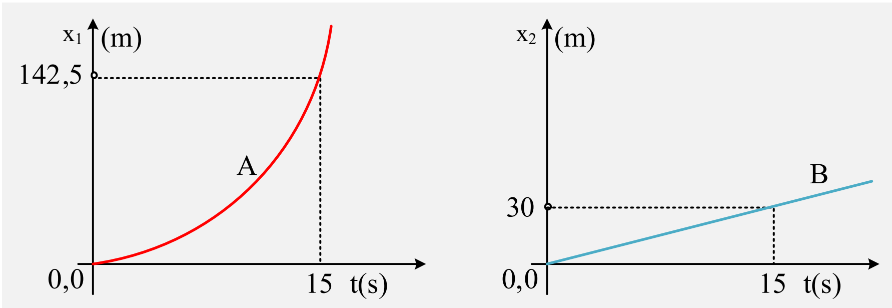
$$B): \quad \Delta\upsilon_2 = \upsilon_{2,\tau} - \upsilon_0 = \upsilon_0 - \upsilon_0 = 0$$

$$\Gamma): \quad \Delta\upsilon_3 = \upsilon_{3,\tau} - \upsilon_0 = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 - \upsilon_0 = 2 \cdot 0,54m/s - 2m/s = -0,92m/s$$

iv) Για το σώμα στην Α) περίπτωση, η συνάρτηση x=x(t) είναι δευτέρου βαθμού, άρα θα έχουμε μια παραβολή, όπου για t_2=15s θα έχουμε:

$$x_{1,2} = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 2 \cdot 15m + \frac{1}{2} 1 \cdot 15^2 m = 142,5m$$

Και γραφική παράσταση όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα.



Στην Β) περίπτωση στη διεύθυνση x το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, x=υ_0·t, συνάρτηση πρώτου βαθμού και γραφική παράσταση ευθεία, όπως στο δεύτερο σχήμα, αφού:

$$x_{2,2} = \upsilon_0 t = 2 \cdot 15m = 30m$$

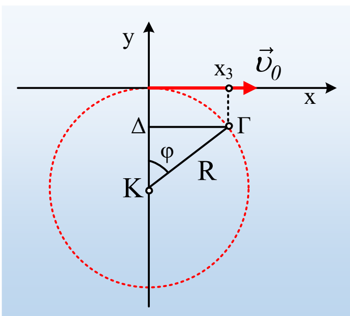
Η τετμημένη x_3 στην περίπτωση της κυκλικής κίνησης, με βάση το πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, είναι ίση:

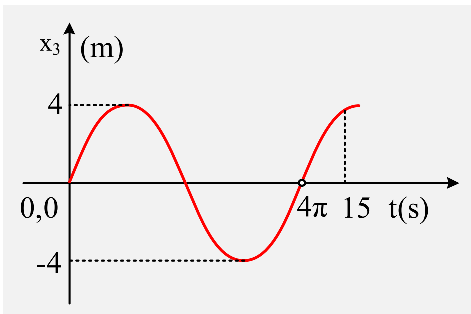
$$x_3 = (\Gamma\Delta) = R \cdot \eta\mu\varphi = 4 \cdot \eta\mu(\tfrac{1}{2} t) \quad \text{(S.I.)}$$

συνεπώς η μεταβολή είναι ημιτονοειδής με μέγιστη τιμή τα 4m και με περίοδο:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi \cdot 4}{2} s = 4\pi \ s$$

Με βάση αυτά σχεδιάζουμε το δεξιό από τα παρακάτω σχήματα.





Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης