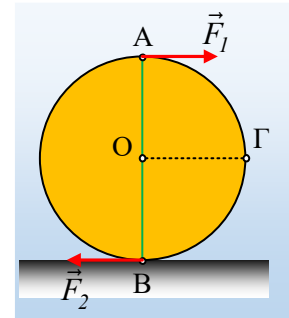


Το ζεύγος και η επιτάχυνση του δίσκου

Ένας ομογενής δίσκος μάζας $M=16\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t_0=0$ στα άκρα της κατακόρυφης διαμέτρου AB ασκούνται δύο δυνάμεις, αντιπαράλληλες και του ίδιου σταθερού μέτρου $F_1=F_2=F=\pi/2\text{ N}$, με διεύθυνση κάθετη στην διάμετρο, όπως στο σχήμα.



- i) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, καθώς και η επιτάχυνση του σημείου Γ , στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας $O\Gamma$, αμέσως μόλις ασκηθούν οι δύο δυνάμεις.
- ii) Αν οι παραπάνω δυνάμεις παραμένουν συνεχώς κάθετες στην διάμετρο AB :
 - α) Ποια χρονική στιγμή t_1 η διάμετρος AB θα είναι ξανά κατακόρυφη, για δεύτερη φορά;
 - β) Να βρεθούν η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του σημείου B τη στιγμή t_1 .
- iii) Τη στιγμή t_1 η δύναμη F_2 παύει να ασκείται στον δίσκο. Ποια η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου B , αμέσως μετά;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας O του δίσκου $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Απάντηση:

- i) Το σύστημα των δύο δυνάμεων αποτελεί ένα ζεύγος δυνάμεων με ροπή $\tau = F \cdot 2R$, ενώ στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο, από όπου προκύπτει ότι:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{w} + \vec{N} = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma \vec{F}_x = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το κέντρο μάζας O του δίσκου θα παραμείνει ακίνητο, ενώ η ασκούμενη ροπή του ζεύγους, σύμφωνα με τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα, θα προκαλέσει την γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, με διεύθυνση πάνω στον νοητό άξονα περιστροφής, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας O , όπως στο σχήμα, με μέτρο:

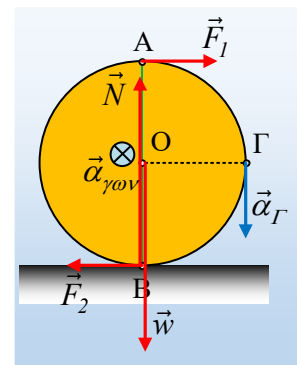
$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot 2R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{4F}{MR} = \frac{4 \cdot \pi/2}{16 \cdot 0,5} \text{ rad/s}^2 = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}^2.$$

Αλλά τότε το σημείο Γ , θα έχει μια επιτρόχια επιτάχυνση, κατακόρυφη όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_{\Gamma} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 = \frac{\pi}{8} \text{ m/s}^2.$$

- ii) Το ζεύγος των δυνάμεων έχει σταθερή ροπή, αφού διαρκώς οι δυνάμεις θα είναι κάθετες στην διάμετρο AB . Αλλά τότε η παραπάνω γωνιακή επιτάχυνση παραμένει σταθερή και ο δίσκος εκτελεί ομαλά



επιταχυνόμενη στροφοκική κίνηση, για την οποία ισχύουν:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \quad (1) \quad \text{και} \quad \theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \quad (2)$$

α) Η διάμετρος AB γίνεται για δεύτερη φορά κατακόρυφη, όταν ο δίσκος συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή, έχοντας διαγράψει γωνία 2π . Οπότε από την σχέση (2) παίρνουμε:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\theta}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\pi}{\pi/4}} s = 4s$$

β) Την παραπάνω στιγμή ο δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα:

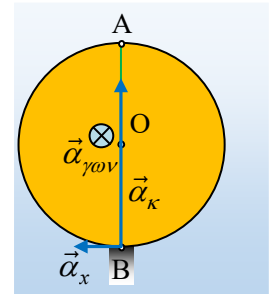
$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = \pi \text{ rad/s}$$

οπότε το σημείο B έχει μια κεντρομόλο επιτάχυνση, με κατεύθυνση προς το κέντρο O (όπως στο σχήμα) και μέτρο:

$$\alpha_{\kappa} = \omega^2 \cdot R = \pi^2 \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 \approx 5 \text{ m/s}^2.$$

Και μια οριζόντια επιτάχυνση, επιτρόχιο, με μέτρο:

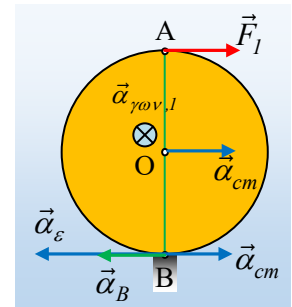
$$a_x = \alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 = \frac{\pi}{8} \text{ m/s}^2.$$



iii) Μόλις καταργηθεί η δύναμη F_2 ο δίσκος θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση, όπου από την αρχή της επαλληλίας, παίρνουμε:

$$\text{Μεταφορική κίνηση:} \begin{cases} \Sigma F = M a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F_1}{M} \rightarrow \\ a_{cm} = \frac{\pi/2}{16} \text{ m/s}^2 = \frac{\pi}{32} \text{ m/s}^2. \end{cases}$$

$$\text{Στροφοκική κίνηση:} \begin{cases} \Sigma \tau = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow F_1 R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow \\ a_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{2F_1}{MR} = \frac{2 \cdot \pi/2}{16 \cdot 0,5} \text{ rad/s}^2 = \frac{\pi}{8} \text{ rad/s}^2. \end{cases}$$



Αλλά τότε η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου B, θα προκύψει από το διανυσματικό άθροισμα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας και της επιτρόχιας επιτάχυνσης:

$$\alpha_{\varepsilon} = a_{\gamma\omega\nu,1} \cdot R = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 = \frac{\pi}{16} \text{ m/s}^2.$$

Οπότε η συνολική επιτάχυνση του B, έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\alpha_B = \alpha_{\varepsilon} - \alpha_{cm} = \frac{\pi}{16} \text{ m/s}^2 - \frac{\pi}{32} \text{ m/s}^2 = \frac{\pi}{32} \text{ m/s}^2.$$