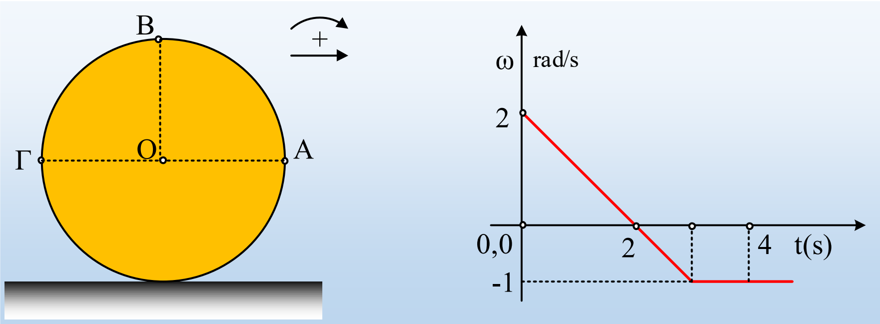
Η κινηματική ενός κυλιόμενου κυλίνδρου

Ένας ομογενής τροχός, κέντρου Ο και ακτίνας R=0,5m, κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο και στο διάγραμμα δίνεται η γωνιακή του ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας θετική, την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.



i) Για την χρονική στιγμή t_0=0 να βρεθούν:

α) Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του Ο.

β) Η ταχύτητα καθώς και η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του σημείου Α, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας του τροχού.

ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του ανώτερου σημείου Β του τροχού, τη χρονική στιγμή t_1=2s.

iii) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σημείου Γ, στο αριστερό άκρο μιας οριζόντιας διαμέτρου τη χρονική στιγμή t_2=4s.

iv) Κατά ποια γωνία έχει περιστραφεί ο τροχός από 0-4s και ποια είναι η αντίστοιχη μετατόπιση του κέντρου του Ο;

Απάντηση:

Παρακάτω θεωρούμε την κύλιση ως μια σύνθετη κίνηση, μια μεταφορική με ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm} και μια στροφική γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο του τροχού, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο. Έτσι παρακάτω οι όροι «γραμμική», «επιτρόχια» ή «κεντρομόλος» αναφέρονται στην στροφική κίνηση.

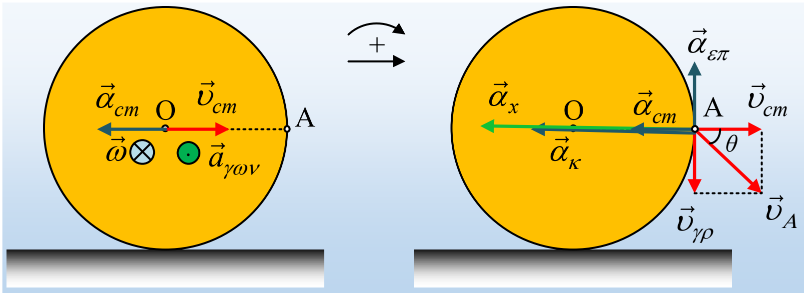
i) Αφού ο τροχός κυλίεται θα ισχύει για τα μέτρα των εμπλεκομένων μεγεθών:

$$\upsilon_{cm} = \omega R \rightarrow \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \rightarrow \alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$$

α) Στο χρονικό διάστημα 0-3s η κλίση στο διάγραμμα ω-t παραμένει σταθερή, πράγμα που σημαίνει ότι η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού παραμένει σταθερή, οπότε για η στιγμιαία επιτάχυνση τη στιγμή t_0 θα είναι ίση και με την μέση στο παραπάνω χρονικό διάστημα:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{-1-2}{3-0} rad/s^2 = -1 rad/s^2.$$

Με δεδομένο ότι η αρχική γωνιακή ταχύτητα, όπου ο τροχός στρέφεται δεξιόστροφα, θεωρείται θετική, η αρνητική γωνιακή επιτάχυνση που προέκυψε αρνητική, θα είναι κάθετη στο επίπεδο του τροχού με φορά προς τον αναγνώστη όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα.



Αλλά τότε και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας θα είναι αρνητική, με φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=1\cdot 0,5m/s^2 = 0,5m/s^2.$$

β) την στιγμή t=0, το κέντρο Ο έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_{cm}=\omega R=2\cdot 0,5m/s=1m/s$$

Αν έρθουμε τώρα στο δεύτερο από τα παραπάνω σχήματα, το σημείο Α έχει την ταχύτητα υ_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και την $\upsilon_{\gamma\rho}$ εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης, γύρω από το Ο, με μέτρο $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=\upsilon_{cm}$, οπότε το σημείο Α έχει ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_A=\sqrt{\upsilon_{cm}^2+\upsilon_{\gamma\rho}^2}=\sqrt{\upsilon_{cm}^2+\upsilon_{cm}^2}=\upsilon_{cm}\sqrt{2}=\sqrt{2}m/s$$

Η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία θ=45° με την οριζόντια διεύθυνση, αφού το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων είναι τετράγωνο.

Όσον αφορά τις επιταχύνσεις του σημείου Α, θα έχει αφενός την επιτάχυνση του κέντρου μάζας α_{cm} λόγω μεταφορικής κίνησης, αφετέρου λόγω της στροφικής κίνησης, θα έχει μια εφαπτομενική επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, την επιτρόχια επιτάχυνση, κατακόρυφη όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R=1\cdot 0,5m/s^2=0,5m/s^2.$$

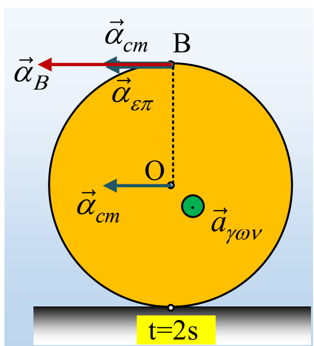
Αλλά και την κεντρομόλο επιτάχυνση, οριζόντια με φορά προς το κέντρο Ο, μέτρου:

$$\alpha_\kappa=\omega^2\cdot R=2^2\cdot 0,5m/s^2=2\ m/s^2.$$

Συνεπώς συνολικά έχουμε για το σημείο Α:

$$\alpha_x=\alpha_{cm}+\alpha_\kappa=0,5\ m/s^2+2m/s^2=2,5\ m/s^2.$$

$$\alpha_y=\alpha_{\varepsilon\pi}=0,5\ m/s^2.$$

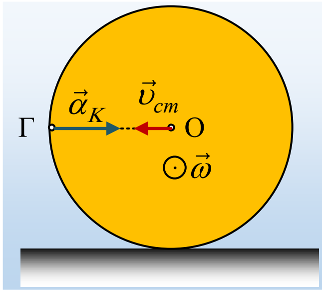


ii) Τη χρονική στιγμή t_1=2s, η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι ίση με μηδέν, άρα και η ταχύτητα υ_{cm}=0. Όμως η κλίση στο διάγραμμα ω-t δεν είναι μηδενική, αφού είναι σταθερή στο χρονικό διάστημα 0-3s. Αλλά τότε το σημείο Β, δεν έχει κεντρομόλο επιτάχυνση και η επιτάχυνσή του είναι οριζόντια, με φορά προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

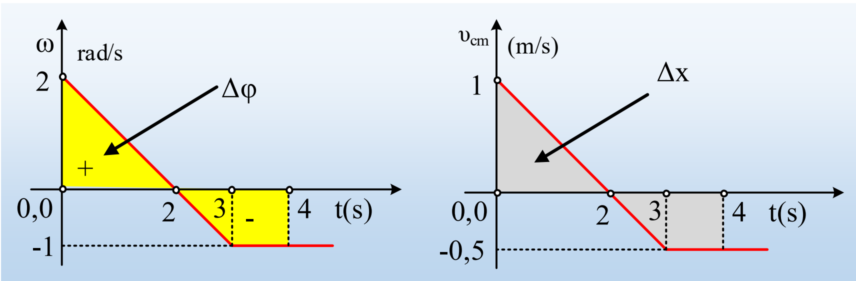
$$\alpha_B=\alpha_{cm}+\alpha_{\varepsilon\pi}=0,5\ m/s^2+0,5\ m/s^2=1\ m/s^2.$$

iii) Μετά την στιγμή 3s, η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, οπότε σταθερή θα παραμένει και η ταχύτητα του κέντρου μάζας για να ικανοποιείται η εξίσωση $υ_{cm}=ωR$. Αλλά τότε τη στιγμή $t_2=4s$, δεν έχουμε ούτε γωνιακή επιτάχυνση, ούτε επιτάχυνση κέντρου μάζας. Έτσι η μοναδική επιτάχυνση του σημείου Γ είναι η κεντρομόλος, με φορά προς το κέντρο και μέτρο:

$$α_{κ,Γ}=ω^2 \cdot R=1^2 \cdot 0,5m/s^2=0,5\ m/s^2.$$



iv) Η συνολική γωνία περιστροφής του τροχού στο χρονικό διάστημα 0-4s θα υπολογιστεί από το διάγραμμα ω-t υπολογίζοντας το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου (όπου το εμβαδόν κάτω από τον άξονα των χρόνων θα θεωρηθεί αρνητικό, πράγμα που σημαίνει ότι στη διάρκεια αυτή ο τροχός στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού).



$$Δφ=\frac{1}{2}2 \cdot 2rad+\frac{2+1}{2}(-1)rad=0,5rad$$

Ενώ την ίδια μορφή θα έχει και η γραφική παράσταση $υ_{cm}=f(t)$, (αφού $υ_{cm}=ωR$), όπως φαίνεται στο δεύτερο διάγραμμα. Αλλά τότε από το αντίστοιχο εμβαδόν του γκρι χωρίου, θα υπολογίσουμε την συνολική μετατόπιση του κέντρου μάζας Ο:

$$Δx=\frac{1}{2}2 \cdot 1m+\frac{2+1}{2}(-0,5)m=0,25m$$

dmargaris@gmail.com