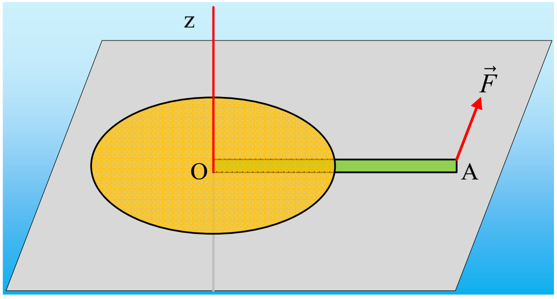
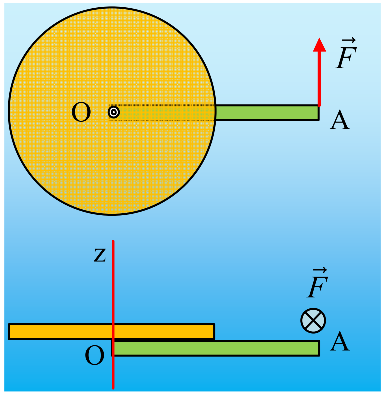
Ένας δίσκος πάνω στην ράβδο.



Μια ομογενής ράβδος μήκους 2m και μάζας M=6kg, ηρεμεί οριζόντια, ενώ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το ένα της άκρο, διαγράφοντας οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στην ράβδο ισορροπεί ένας ομογενής δίσκος μάζας m και ακτίνας R=1m, ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από τον ίδιο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του O, επίσης χωρίς τριβές. Σε μια στιγμή t=0 ασκούμε στο άκρο A της ράβδου μια σταθερή οριζόντια δύναμη, μέτρου F=4N, κάθετα στην ράβδο, με αποτέλεσμα η ράβδος να αρχίσει να περιστρέφεται, παρασύροντας και τον δίσκο σε περιστροφή, λόγω των τριβών που αναπτύσσονται μεταξύ τους. Στο πρώτο από τα διπλανά σχήματα βλέπετε την εικόνα στο χώρο, ενώ στα δυο επόμενα σε κάτοψη και πλάγια προβολή.



i) Να βρεθεί η στροφορμή του συστήματος ράβδος- δίσκος τη χρονική στιγμή t_1=5s.

ii) Αν τη στιγμή t_1 η ράβδος έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1=4rad/s, να βρεθεί η στροφορμή του δίσκου, τη στιγμή αυτή.

iii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής τη στροφορμής της ράβδου και ο αντίστοιχος του δίσκου, την χρονική στιγμή t΄=2s, αν οι τριβές που ασκούνται στην ράβδο παρουσιάζουν σταθερή ροπή ως προς τον άξονα z.

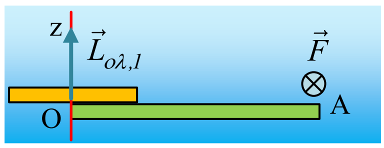
iv) Δίνεται η μάζα του δίσκου m=8kg, ενώ τη στιγμή t_1 η δύναμη F σταματά να ασκείται στη ράβδο. Να υπολογιστούν:

α) Η κοινή τελική γωνιακή ταχύτητα των δύο σωμάτων.

β) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, που οφείλεται στις τριβές.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας ως προς τον άξονα z, της ράβδου $I_1=1/3\ Ml^2$ και του δίσκου $I_2=½\ mR^2$.

Απάντηση:



i) Η μόνη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα των δύο σωμάτων, είναι η ροπή της δύναμης F, μια σταθερή ροπή, οπότε και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, ως προς τον άξονα z, θα παραμένει σταθερός. Έτσι από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για το σύστημα θα έχουμε:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = \Sigma\tau_{εξ} \rightarrow \frac{\Delta L_{ολ}}{\Delta t} = F\cdot\ell \rightarrow \frac{L_{ολ.1}-0}{t_1-0} = F\cdot\ell \rightarrow$$

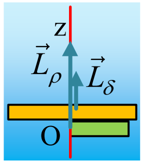
$$L_{ολ.1} = F\cdot\ell\cdot t_1 = 4\cdot 2\cdot 5kgm^2/s = 40kgm^2/s$$

Με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα πάνω, όπως στο παραπάνω σχήμα.

ii) Η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς το άκρο O είναι ίση:

$$I_\rho = \frac{1}{3} M \ell^2 = \frac{1}{3} 6 \cdot 2^2 \, kgm^2 = 8kgm^2 .$$

Εξάλλου για την ολική στροφορμή, η οποία είναι το άθροισμα των στροφορμών ράβδου και δίσκου, ως προς τον άξονα z, θα έχουμε:



$$L_{o\lambda.1} = L_\rho + L_\delta = I_\rho \cdot \omega_1 + L_\delta \rightarrow$$
$$L_\delta = L_{o\lambda.1} - I_\rho \cdot \omega_1 = 40kgm^2 / s - 8 \cdot 4kgm^2 / s = 8kgm^2 / s$$

Στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι στροφορμές και των δύο στερεών, όπου $L_\rho = 32 \ kgm^2/s$.

iii) Αφού η ροπή της τριβής, ως προς τον άξονα z, είναι σταθερή, οι δύο ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής θα είναι σταθεροί, οπότε οι στιγμιαίες τιμές θα είναι ίσες με τις αντίστοιχες μέσες τιμές Έτσι:

$$\left(\frac{dL_\rho}{dt}\right)_{t'} = \frac{\Delta L_\rho}{\Delta t} = \frac{L_{\rho,1} - 0}{t_1 - 0} = \frac{32}{5} kgm^2 / s^2 = 6,4kgm^2 / s^2 .$$

$$\left(\frac{dL_\delta}{dt}\right)_{t'} = \frac{\Delta L_\delta}{\Delta t} = \frac{L_{\delta,1} - 0}{t_1 - 0} = \frac{8}{5} kgm^2 / s^2 = 1,6kgm^2 / s^2 .$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι με πρόσθεση των δύο παραπάνω ρυθμών, θα πάρουμε $8kgm^2/s^2$, τιμή ίση με την ροπή της εξωτερικής δύναμης $\tau_{\varepsilon\xi} = F \cdot \ell = 4 \cdot 2Nm = 8Nm$. Μήπως μπορείτε να βρείτε την ροπή της τριβής που δέχεται η ράβδος;

iv) Τη στιγμή t_1 που παύει να ασκείται η δύναμη το σύστημα έχει στροφορμή $L_{o\lambda,1}$, ενώ στη συνέχεια τα δύο στερεά αλληλεπιδρούν μέσω της τριβής (εσωτερική δύναμη), οπότε μετά από λίγο θα αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα.

α) Από την διατήρηση της στροφορμής για το σύστημα, θα πάρουμε:

$$L_{o\lambda,1} = L_\tau \rightarrow L_{o\lambda,1} = I_\rho \cdot \omega_\kappa + I_\delta \cdot \omega_\kappa \rightarrow$$
$$\omega_\kappa = \frac{L_{o\lambda,1}}{I_\rho + I_\delta} = \frac{L_{o\lambda,1}}{I_\rho + \frac{1}{2} mR^2} = \frac{40}{8 + \frac{1}{2} 8 \cdot 1^2} rad / s = \frac{10}{3} rad / s$$

β) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα είναι ίση με το έργο της ασκούμενης δύναμης F:

$$W_F = \tau\varphi = F \cdot \ell \cdot \varphi \quad (1)$$

Όπου φ η γωνία περιστροφής της ράβδου. Αλλά αν η ροπή της τριβής παραμένει σταθερή (υπόθεση) τότε η ράβδος κινήθηκε με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, οπότε για το χρονικό διάστημα $0\text{-}t_1$ ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \varphi = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$

Με απαλοιφή της $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ στις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε:

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega_1}{t_1}t_1^2 = \frac{1}{2}\omega_1 t_1 = \frac{1}{2}4\cdot 5rad = 10rad.$$

Οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$W_F = \tau\varphi = F\cdot\ell\cdot\varphi = 4\cdot 2\cdot 10J = 80J$$

Ενώ τελικά το σύστημα ράβδος-δίσκος θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_\tau = \frac{1}{2}I_\rho\omega_\kappa^2 + \frac{1}{2}I_\delta\omega_\kappa^2 = \frac{1}{2}\left(I_\rho + \frac{1}{2}mR^2\right)\omega_\kappa^2 \to$$

$$K_\tau = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{1}{2}8\cdot 1^2\right)\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^2 J = \frac{200}{3}J$$

Οπότε η απώλεια της μηχανικής ενέργειας εξαιτίας των τριβών είναι ίση:

$$\Delta E_M = W_F - K_\tau = 80J - \frac{200}{3}J = \frac{40}{3}J.$$

dmargaris@gmail.com