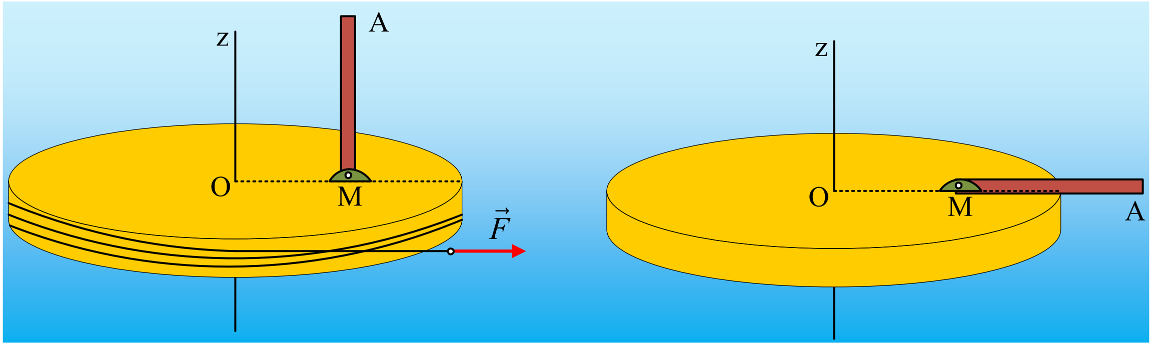
Όταν η στρεφόμενη ράβδος πέσει

Ένας ομογενής δίσκος μάζας M=17kg και ακτίνας R=1m, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα z. Στο μέσον Μ μιας ακτίνας του έχει στερεωθεί σε κατακόρυφη θέση, μέσω σφιχτής άρθρωσης, μια ομογενής ράβδος μήκους l=R.



Γύρω από τον δίσκο, έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου ασκούμε τη στιγμή $t_0=0$, μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=5N, μέχρι τη στιγμή t_1, όπου ο δίσκος έχει διαγράψει γωνία θ=9rad.

i) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος τη στιγμή t_1, που παύει να ασκείται η δύναμη F;

Δίνεται η μάζα της ράβδου m=6kg, ενώ κάποια στιγμή μετά την t_1 «λασκάρει η άρθρωση» με αποτέλεσμα η ράβδος να πέσει, στην διεύθυνση της ακτίνας όπως στο δεύτερο σχήμα, οπότε περιστρέφεται μαζί με τον δίσκο, οριζόντια.

ii) Ποια η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη στιγμή t_1 που σταματά η άσκηση της δύναμης F;

iii) Για τη χρονική στιγμή t_2=5s να υπολογιστούν:

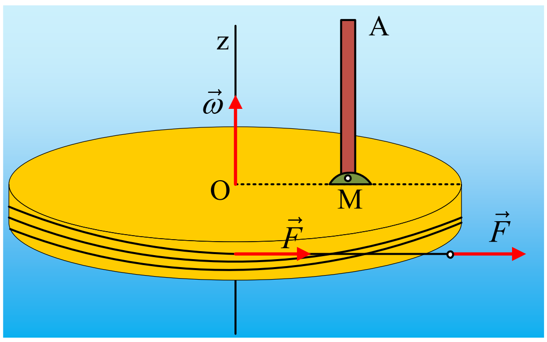
α) Η ισχύς της δύναμης F.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, ως προς τον άξονα z.)

iv) Ποια η ταχύτητα του άκρου Α της ράβδου, κατά την οριζόντια περιστροφής της;

Δίνονται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα z, $I_\delta= ½ MR^2$, καθώς και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της $I_\rho=ml^2/12$.

Απάντηση:



i) Μέσω του νήματος, η δύναμη F ασκείται στον δίσκο τον οποίο και επιταχύνει στροφικά. Η κινητική ενέργεια του συστήματος δίσκος-ράβδος είναι ίση με την ενέργεια που μεταφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης ή ισοδύναμα του έργου της ροπής της δύναμης:

$$K_\sigma = W_\tau = \tau \cdot \theta = FR \cdot \theta = 5 \cdot 1 \cdot 9J = 45J$$

ii) Για όσο χρόνο η ράβδος παραμένει κατακόρυφη, το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα στερεό s_1, το οποίο παρουσιάζει ως προς τον άξονα z, ροπή αδράνειας I_1:

$$I_1 = I_\rho + I_\sigma = \frac{1}{2}MR^2 + \sum m_i \cdot d^2 = \frac{1}{2}MR^2 + \sum m_i \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{R^2}{4}\sum m_i \rightarrow$$

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{4}mR^2 = \frac{1}{2}17 \cdot 1^2 kgm^2 + \frac{1}{4}6 \cdot 1^2 kgm^2 = 10\ kgm^2$$

Αλλά τότε από την κινητική ενέργεια του s_1, παίρνουμε:

$$K_\sigma = K_{s_1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K_\sigma}{I_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} rad/s = 3 rad/s$$

iii) Το στερεό s_1 στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση:

$$\Sigma\tau_o = I_1\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{FR}{I_1} = \frac{5 \cdot 1}{10} rad/s^2 = 0,5 rad/s^2.$$

Συνεπώς τη στιγμή t_2=4s έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα:

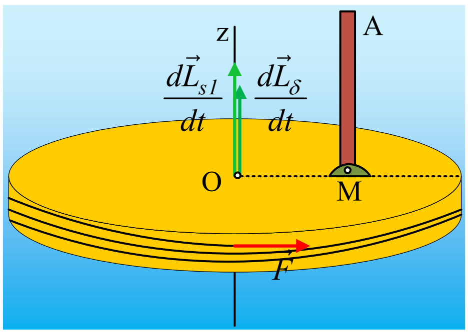
$$\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_2 = 0,5 \cdot 5 rad/s = 2,5\ rad/s.$$

(αφού $\omega_2 < \omega_1$, προφανώς $t_2 < t_1$ και δεν έχει έρθει ακόμη η στιγμή που η δύναμη παύει να επιταχύνει στροφικά το στερεό s_1).

α) Η ισχύς της δύναμης, ίση με την ισχύ της ασκούμενης ροπής τη στιγμή t_2, είναι:

$$P_F = \tau \cdot \omega = FR \cdot \omega = 5 \cdot 1 \cdot 2,5 W = 12,5 W$$

β) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημά μας είναι τα βάρη και η δύναμη F. Ως προς τον άξονα z, μόνο η F εμφανίζει ροπή (το βάρος της ράβδου είναι παράλληλο στον άξονα), οπότε για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής θα έχουμε:



$$\frac{dL_{s_1}}{dt} = \sum \tau_{\varepsilon\xi} = FR = 5 \cdot 1\ kgm^2/s^2 = 5\ kgm^2/s^2.$$

Πάνω στον άξονα z με φορά προς τα πάνω.

Για τον αντίστοιχο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, θα έχουμε:

$$\frac{dL_\rho}{dt} = \sum \tau = I_\rho \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2}17 \cdot 1^2 \cdot 0,5\ kgm^2/s^2 = 4,25 kgm^2/s^2.$$

Ίδιας κατεύθυνσης με τον προηγούμενο ρυθμό, όπως στο σχήμα.

iv) Στη διάρκεια της πτώσης της ράβδου δεν ασκούνται στο σύστημα εξωτερικές ροπές, ως προς τον άξονα z, οπότε η ολική στροφορμή παραμένει σταθερή:

$$\vec{L}_{s_1} = \vec{L}_{s_2} \rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_3 \ (1)$$

Όπου ο δίσκος με την ράβδο αποτελούν τώρα το στερεό s_2 με ροπή αδράνειας:

$$I_2 = I_\rho + I'_\sigma = \frac{1}{2}MR^2 + \left(I_{cm} + md^2\right)$$

Όμως με βάση το 2^o σχήμα d=R και αφού $\ell = R$, παίρνουμε:

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + mR^2\right) = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{13}{12}mR^2 \rightarrow$$

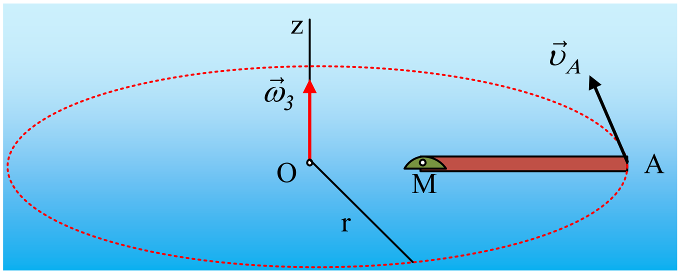
$$I_2 = \frac{1}{2}17 \cdot 1^2\,kgm^2 + \frac{13}{12}6 \cdot 1^2\,kgm^2 = 15\ kgm^2.$$

Με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε:

$$\omega_3 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} = \frac{10 \cdot 3}{15} rad/s = 2rads$$

Συνεπώς το άκρο Α της ράβδου εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $r = R + \frac{\ell}{2} = 1{,}5R$ έχοντας ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_A = \omega_3 r = 2 \cdot 1.5 \cdot 1m/s = 3m/s$$



Με κατεύθυνση όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com