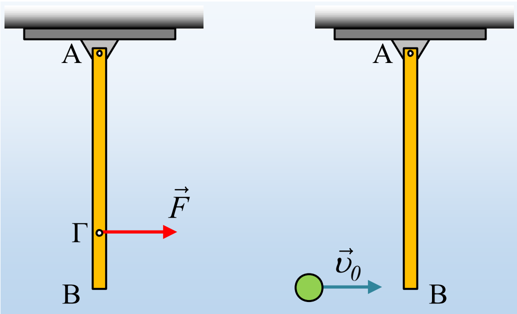
Η ελαστική κρούση και η ΑΔΟ



Η ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους l=1m και μάζας M=3kg, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Α και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση, όπως στο σχήμα.

i) Σε μια στιγμή ασκούμε στην ράβδο μια δύναμη F, κάθετη σε αυτήν στο σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=x. Να βρεθεί η οριζόντια δύναμη που θα ασκηθεί στην ράβδο από τον άξονα περιστροφής, αμέσως μετά, σε συνάρτηση με το x και να την σχεδιάσετε στο σχήμα στις περιπτώσεις όπου:

α) x= l/3, β) x= 2l/3 και γ) x=l.

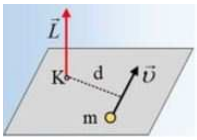
ii) Μια σφαίρα μάζας m=1kg συγκρούεται ελαστικά με την ράβδο, στο άκρο της Β, έχοντας ελάχιστα πριν την κρούση, οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0=2m/s.

α) Σας λένε ότι κατά την κρούση αυτή, η ορμή του συστήματος δεν παραμένει σταθερή. Αφού εξηγήσετε γιατί ισχύει αυτό, μπορείτε να προβλέψετε αν συνολικά η ορμή θα αυξηθεί ή θα μειωθεί στη διάρκεια της κρούσης; Να δώσετε μια σύντομη δικαιολόγηση της πρόβλεψής σας.

β) Να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση.

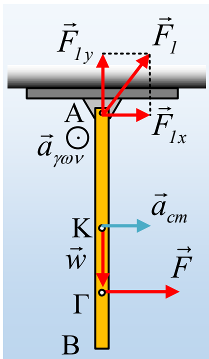
γ) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής του συστήματος που οφείλεται στην ελαστική κρούση μεταξύ σφαίρας και ράβδου.

iii) Επαναλαμβάνουμε την κρούση, αλλά τώρα η σφαίρα κτυπάει κάθετα την ράβδο σε ένα σημείο Δ, το οποίο απέχει κατά d= l/3 από το άκρο της Β. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του συστήματος η οποία οφείλεται στην κρούση.



Δίνεται ότι ένα υλικό σημείο το οποίο κινείται με ταχύτητα υ, παρουσιάζει ως προς ένα τυχαίο σημείο Κ, στροφορμή μέτρου L=mυ·d, όπου d η απόσταση του σημείου Κ από τον φορέα της ταχύτητας, με κατεύθυνση όπως στο σχήμα, ενώ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το άκρο της Α, I= Ml^2/3.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο, όπου F_1 η δύναμη από τον άξονα. Από τον 2^o νόμο για την στροφική κίνηση της ράβδου, έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot x = \frac{1}{3} M\ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3F \cdot x}{M\ell^2}$$

Οπότε το κέντρο μάζας της ράβδου έχει επιτάχυνση, παράλληλη της ασκούμενης δύναμης (εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά που πρόκειται να διαγράψει), μέτρου:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{3F \cdot x}{M\ell^2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{3F}{2M\ell} \cdot x$$

Ενώ ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας της ράβδου, μας δίνει:

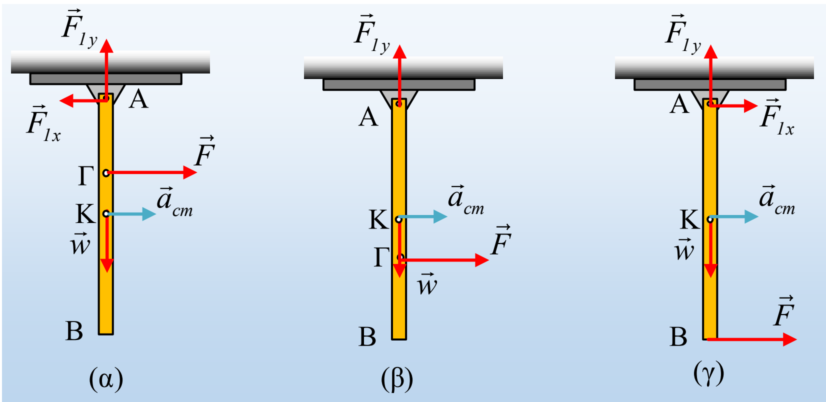
$$\Sigma F_x = M a_{cm} \to F + F_{1x} = M \cdot \frac{3F}{2M\ell} \cdot x \to F_{1x} = \frac{3F}{2\ell} \cdot x - F \to$$

$$F_{1x} = F\left(\frac{3}{2\ell} \cdot x - 1\right)$$

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση, βρίσκουμε για τις τιμές του x, που δίνονται:

- Αν $x = \frac{\ell}{3} \to F_{1x} = F\left(\frac{3}{2\ell} \cdot \frac{\ell}{3} - 1\right) = -\frac{F}{2}$ σχήμα (α).
- Αν $x = \frac{2\ell}{3} \to F_{1x} = F\left(\frac{3}{2\ell} \cdot \frac{2\ell}{3} - 1\right) = 0$ σχήμα (β).
- Αν $x = \ell \to F_{1x} = F\left(\frac{3}{2\ell} \cdot \ell - 1\right) = \frac{F}{2}$ σχήμα (γ).

Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις η ράβδος δέχεται και κατακόρυφη συνιστώσα δύναμη F_{1y}=w, αφού ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση. Έτσι έχουμε τα σχήματα:

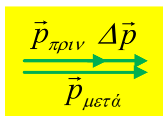


ii) Στη διάρκεια της κρούσης, η σφαίρα ασκεί κάποια δύναμη στην ράβδο, στην διεύθυνση της ταχύτητας $υ_0$.

α) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα η κρούση στο άκρο Β, συνοδεύεται με άσκηση δύναμης στη ράβδο (σχήμα γ) πράγμα που προκαλεί την εμφάνιση της δύναμης F_{1x} από τον άξονα, της ίδιας κατεύθυνσης. Αλλά τότε το σύστημα των σωμάτων δεν είναι μονωμένο και η ορμή δεν διατηρείται κατά την κρούση.

Εξάλλου από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα, έχουμε:

$$\frac{d\vec{p}_{o\lambda}}{dt} = \sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} \to \frac{d\vec{p}_{o\lambda}}{dt} = \vec{F}_1$$



Και αφού η εξωτερική δύναμη F_1 έχει φορά προς τα δεξιά, προς τα δεξιά θα είναι και κάθε στιγμή και το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της ορμής, συνεπώς και η συνολική μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{p}_{o\lambda}$ θα έχει την κατεύθυνση της αρχικής ορμής! Αλλά τότε η ορμή του συστήματος αυξάνεται, με βάση και το διπλανό σχήμα.

β) Ενώ όμως λόγω της εξωτερικής δύναμης F_1 δεν διατηρείται η ορμή του συστήματος, κατά την κρούση, η ροπή της δύναμης αυτής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδενική, συνεπώς για την κρούση διατηρείται η στροφορμή! Έτσι θα έχουμε:

Α.Δ.Σ. : $$\vec{L}_{πριν,A} = \vec{L}_{μετά,A} \rightarrow m\upsilon_o \ell = m\upsilon_1 \ell + I_A \cdot \omega \quad (1)$$

Δ.Κ.Ε. : $$K_{πριν} = K_{μετά} \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_A\omega^2 \quad (2)$$

Υπολογίζουμε την ροπή αδράνειας της ράβδου:

$$I_A = \frac{1}{3}M\ell^2 = \frac{1}{3}3 \cdot 1^2\, kgm^2 = 1kgm^2$$

Και με αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών (για…ευκολία), το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l}(1):\ 2=\upsilon_1+\omega \\ (2):\ 4=\upsilon_1^2+\omega^2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}4=\upsilon_1^2+\omega^2+2\upsilon_1\omega \\ 4=\upsilon_1^2+\omega^2\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}2\upsilon_1\omega=0 \rightarrow \upsilon_1=0, \text{ αφού } \omega\neq 0 \rightarrow \\ \boldsymbol{\omega=2rad/s}\end{array}$$

γ) Για την μεταβολή της ορμής του συστήματος που οφείλεται στην κρούση, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου, αμέσως μετά την κρούση είναι $\upsilon_{cm} = \omega \cdot \frac{\ell}{2} = 1m/s$, έχουμε:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \rightarrow \Delta p = M\upsilon_{cm} - m\upsilon_o \rightarrow$$
$$\Delta p = (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2)kgm/s = 1kgm/s.$$

Επιβεβαιώνοντας το συμπέρασμα του υποερωτήματος α).

iii) Με βάση το ερώτημα i) αν η κρούση γίνει σε απόσταση $x = \frac{2\ell}{3}$ από τον άξονα περιστροφής, η ράβδος δεν θα δεχθεί οριζόντια δύναμη από τον άξονα, στη διάρκεια της κρούσης. Αλλά τότε το σύστημα είναι μονωμένο, με αποτέλεσμα η ορμή του συστήματος να παραμένει σταθερή. Δηλαδή Δp=0.

Ας το επιβεβαιώσουμε, δουλεύοντας όπως παραπάνω:

Α.Δ.Σ. : $$\vec{L}_{πριν,A} = \vec{L}_{μετά,A} \rightarrow m\upsilon_o \frac{2}{3}\ell = m\upsilon_1' \frac{2}{3}\ell + I_A \cdot \omega' \quad (1α)$$

Δ.Κ.Ε. : $$K_{πριν} = K_{μετά} \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}I_A\omega'^2 \quad (2α)$$

Και με αντικατάσταση ξανά των αριθμητικών τιμών, το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l}(1α):\ 4=2\upsilon'_1+3\omega' \\ (2α):\ 4=\upsilon_1'^2+\omega'^2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\upsilon_1'^2 = 4 + \frac{9}{4}\omega'^2 - 6\omega \\ \upsilon_1'^2 = 4 - \omega'^2\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\frac{13}{4}\omega'^2 - 6\omega' = 0 \rightarrow \omega' = \frac{24}{13}rad/s \\ \text{αφού } \omega'\neq 0 \rightarrow\end{array}$$

$$\text{Και } \upsilon_1' = 2 - \frac{3}{2}\omega' = \left(2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{24}{13}\right)m/s = -\frac{10}{13}m/s \text{ ενώ } \upsilon_{cm}' = \omega'\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{12}{13}m/s$$

Με βάση τις παραπάνω τιμές, έχουμε για την μεταβολή της ορμής του συστήματος που οφείλεται στην κρούση:

$$\Delta\vec{p}' = \vec{p}'_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \Delta p' = M\upsilon_{cm}' + m\upsilon_1' - m\upsilon_o \rightarrow$$

$$\Delta p = \left(3\cdot\frac{12}{13} - 1\cdot\left(-\frac{10}{13}\right)\right)kgm/s - 1\cdot 2kgm/s = \left(\frac{36-10}{13}\right)kgm/s - 2kgm/s = 0$$

dmargaris@gmail.com