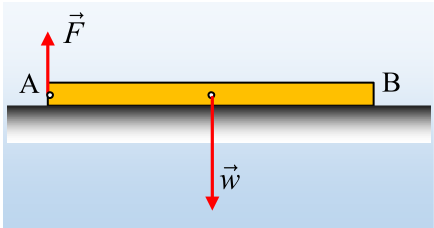
Ισορροπία και επιτάχυνση δοκού.



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους 2m και μάζας 24kg. Σε μια στιγμή στο άκρο Α τη δοκού, ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα πάνω, μέτρου F=90Ν και παρατηρούμε ότι η σανίδα συνεχίζει να ηρεμεί.

i) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το επίπεδο στη δοκό, καθώς και η ροπή της ως προς το κέντρο μάζας Κ της δοκού.

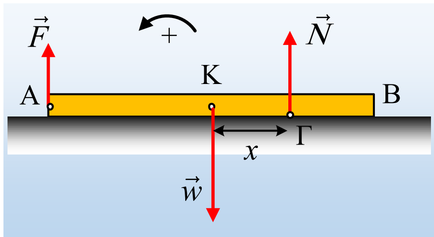
ii) Ποια η μέγιστη τιμή F_1 που μπορεί να πάρει το μέτρο της δύναμης, χωρίς να πάψει η δοκός να ισορροπεί;

iii) Αν η δύναμη πάρει τιμή F_2 =200Ν, να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσει το άκρο Α της δοκού.

iv) Υποστηρίζεται η θέση ότι αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης κατακόρυφης δύναμης F, στο ένα άκρο της δοκού, μπορούμε να πετύχουμε, το άμεσο χάσιμο της επαφή της ράβδου με το επίπεδο. Να εξετάσετε αν αυτό μπορεί να συμβεί.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς δοκού ως προς άξονα κάθετο που περνά από το μέσον της I_{cm}= $M\ell^2/12$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



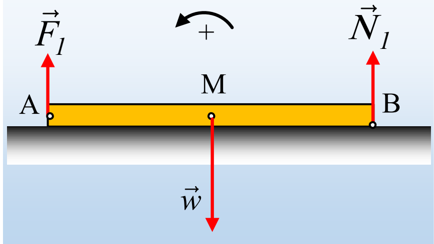
i) Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου είναι προφανώς κατακόρυφη, ενώ από την συνθήκη Στ=0, για κάθε σημείο, άρα και για το μέσον Κ της δοκού, συμπεραίνουμε ότι η κάθετη αντίδραση του επιπέδου δεν ασκείται στο μέσον της δοκού, αλλά σε κάποιο σημείο Γ, δεξιά του Κ, όπως στο σχήμα. Έτσι από την ισορροπία της δοκού παίρνουμε:

$$\Sigma F = 0 \to F + N - w = 0 \to N = mg - F = 24 \cdot 10N - 90N = 150N \text{ και}$$

$$\Sigma\tau_K = 0 \to N \cdot x + w \cdot 0 - F \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \quad (1) \xrightarrow{\text{αντικατάσταση}}$$

$$150x = 90 \cdot 1 \to x = 0{,}6m \quad \text{ή}$$

$$\tau_{K,N} = 150x = 90Nm$$

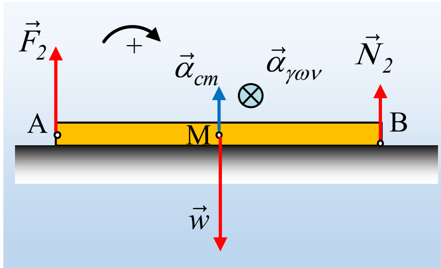


ii) Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, τόσο αυξάνεται η απόσταση x του φορέα της Ν από το κέντρο μάζας Κ. Αλλά τότε αυξάνοντας συνεχώς το μέτρο της F, κάποια στιγμή η Ν θα φτάσει στο άκρο Β της δοκού, πράγμα που σημαίνει πρακτικά ότι η δοκός έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, μόνο με το άκρο της Β και είναι έτοιμη να αρχίσει να περιστρέφεται. Ξανά από την ισορροπία της παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_K = 0 \to N_1 \cdot \frac{\ell}{2} + w \cdot 0 - F_1 \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \;\to\; N_1 = F_1 \quad (2)$$

$$\Sigma F = 0 \to N_1 + F_1 = w \xrightarrow{(2)} 2F_1 = w \to F_1 = \frac{1}{2}mg = 120N$$

iii) Θεωρούμε την κίνηση που θα πραγματοποιήσει η δοκός είναι επαλληλία μιας μεταφορικής κίνησης και μιας στροφικής γύρω από νοητό οριζόντιο κάθετο στην δοκό άξονα, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Ο. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



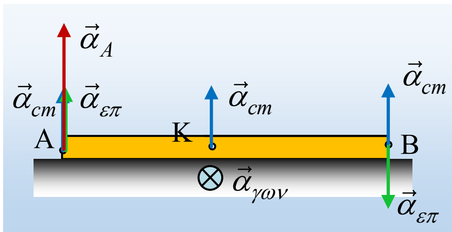
Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = M\alpha_{cm} \to F_2 + N_2 - Mg = M\alpha_{cm}$ (3)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to$

$$F_2 \cdot \frac{\ell}{2} - N_2 \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12} M\ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \to$$

$$F_2 - N_2 = \frac{1}{6} M\ell \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (4)$$

Αλλά τότε το άκρο Β της δοκού θα έχει τις επιταχύνσεις του διπλανού σχήματος, όπου $\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2}$, οπότε θεωρώντας ότι το Β παραμένει σε επαφή με το επίπεδο, θα έχουμε $\alpha_{cm} = \alpha_{\varepsilon\pi}$ και με πρόσθεση κατά μέλη, των (3) και (4), παίρνουμε:



$$2F_2 - Mg = \frac{4}{3} Ma_{cm} \quad \to$$

$$a_{cm} = \frac{3F_2}{2M} - \frac{3}{4}g = \frac{3 \cdot 200}{2 \cdot 24} m/s^2 - \frac{3}{4} 10m/s^2 = 5m/s^2.$$

Οπότε η επιτάχυνση του άκρου Α, είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, με μέτρο:

$$\alpha_A = \alpha_{cm} + a_{\varepsilon\pi} = 2\alpha_{cm} = 2 \cdot 5m/s^2 = 10m/s^2.$$

iv) Έστω με την άσκηση κατάλληλης δύναμης F στο άκρο Α, πετυχαίνουμε η δοκός να χάσει άμεσα την επαφή της με το επίπεδο, οπότε προφανώς N=0. Τότε από τις εξισώσεις (3) και (4) του προηγούμενου ερωτήματος, θα βρούμε:

$$(3) \Rightarrow F - Mg = Ma_{cm,1} \to a_{cm,1} = \frac{F}{M} - g \quad (3a)$$

$$(4) \Rightarrow F = \frac{1}{6} M\ell \cdot a_{\gamma\omega\nu,1} \to a_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{6F}{M\ell} \quad (4a)$$

Αλλά τότε αν πάμε στο άκρο Β, θα έχει επιτάχυνση:

$$\alpha_B = \alpha_{cm1} - \alpha_{\varepsilon\pi 1} = \alpha_{cm1} - \alpha_{\gamma\omega\nu 1} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{F}{M} - g - \frac{6F}{M\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = -\frac{2F}{M} - g < 0$$

Δηλαδή προς τα κάτω, πράγμα που σημαίνει, ότι θα κινηθεί με κατεύθυνση προς το επίπεδο και δεν πρόκειται να χάσει την επαφή μαζί του και η υπόθεσή μας ότι N=0 κατέληξε σε άτοπο.

Συμπέρασμα καμιά κατακόρυφη δύναμη στο άκρο της δοκού, δεν πρόκειται να προκαλέσει άμεσο μηδενισμό της δύναμης στήριξης N, με το επίπεδο. Η δοκός θα αρχίσει να ανασηκώνεται και να περιστρέφεται, αλλά το άλλο της άκρο θα παραμένει σε επαφή με το επίπεδο, για κάποιο χρόνο.

Σχόλιο

Θα μπορούσε κάποιος να ελέγξει αν η υπόθεση ότι N≠0, στο iii) ερώτημα είναι ή όχι σωστή.

Δεν έχει παρά να υπολογίσει το μέτρο της π.χ. με την βοήθεια της σχέσης (3):

$$F_2+N_2-Mg=M\alpha_{cm} \rightarrow N_2=Mg-F_2+M\alpha_{cm}=240N-200N+24\cdot 5N=160N$$

Αποτέλεσμα απολύτως συμβατό με την υπόθεσή μας.

dmargaris@gmail.com