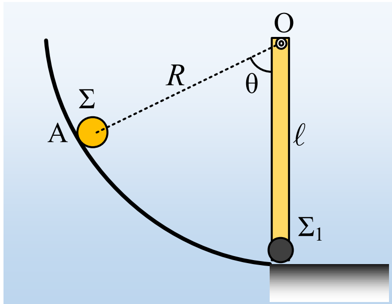
# *Μια κρούση σφαίρας με στερεό*




Στο σχήμα δίνεται ένα κατακόρυφο λείο τεταρτοκύκλιο, κέντρου Ο και ακτίνας R=1m. Μια ομογενής ράβδος μήκους l=1m μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το Ο και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση, ενώ στο κάτω άκρο της έχει προσδεθεί σταθερά μια μικρή σφαίρα $Σ_1$, μάζας $m_1$=1kg (αμελητέων διαστάσεων). Στο σημείο Α του τεταρτοκυκλίου, όπου η ακτίνα ΟΑ σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, όπου συνθ=0,2, αφήνουμε ελεύθερη μια σφαίρα Σ μάζας m=2kg, η οποία θεωρείται υλικό σημείο, να κινηθεί, οπότε μετά από λίγο φτάνοντας στην βάση του τεταρτοκυκλίου συγκρούεται μετωπικά με την σφαίρα $Σ_1$. Μετά την κρούση η σφαίρα Σ κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου υ΄=1m/s.

i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας Σ ελάχιστα πριν την κρούση.

ii) Να υπολογιστεί η στροφορμή του στερεού s, που αποτελείται από την δοκό και τη σφαίρα $Σ_1$, αμέσως μετά την κρούση.

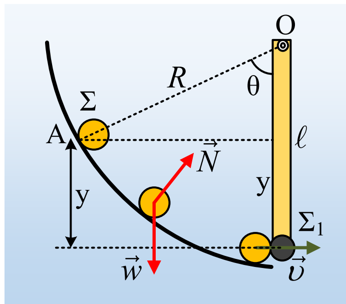
iii) Αν η ράβδος έχει μάζα M=3kg:

α) να υπολογιστεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση.

β) Ποια η μέγιστη γωνία εκτροπής της δοκού από την κατακόρυφη, μετά την κρούση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της στο άκρο Ο, I= $Ml^2/3$ και g=10m/s$^2$.

## *Απάντηση:*




i) Αφού το ημικύκλιο είναι λείο, οι δυνάμεις (w και N) που ασκούνται στη σφαίρα δεν εμφανίζουν ροπή ως προς το κέντρο της, με αποτέλεσμα να μην αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση, οπότε δεν θα περιστραφεί εκτελώντας μεταφορική κίνηση και ω=0. Έτσι εφαρμόζοντας την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την σφαίρα Σ, μεταξύ της αρχική θέσης Α και ελάχιστα πριν την κρούση, παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \xrightarrow{U_{τελ}=0}$$

$$mgy = \frac{1}{2}mυ^2 \rightarrow υ = \sqrt{2gy} = \sqrt{2g(\ell - \ell συνθ)} \rightarrow$$

$$υ = \sqrt{2g\ell(1-συνθ)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1(1-0,2)}m/s = 4m/s$$

ii) Η στροφορμή του συστήματος, ως προς το κέντρο του ημικυκλίου Ο παραμένει σταθερή, στη διάρκεια της κρούσης, αφού δεν ασκούνται στο σύστημα εξωτερικές ροπές. Οπότε θεωρώντας την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού ως θετική, θα έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow m\upsilon R = m\upsilon' R + L_s \rightarrow$$

$$L_s = m\upsilon R - m\upsilon' R = 2\cdot 4\cdot 1kgm^2/s - 2\cdot 1\cdot 1kgm^2/s = 6kgm^2/s.$$

iii) Η ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής του στο Ο, είναι:

$$I_s = I_\rho + I_{\Sigma_1} = \frac{1}{3}M\ell^2 + m_1\ell^2 = \frac{1}{3}3\cdot 1kgm^2 + 1\cdot 1kgm^2 = 2kgm^2.$$

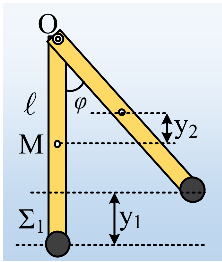
Οπότε αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω, μετά την κρούση, όπου:

$$L_s = I_s\omega \rightarrow \omega = \frac{L_s}{I_s} = \frac{6}{2}rad/s = 3rad/s$$

α) Για την απώλεια της κινητικής ενέργειας στη διάρκεια της κρούσης, έχουμε:

$$\Delta K = K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_s\omega^2\right) \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}2\cdot 4^2 J - \left(\frac{1}{2}2\cdot 1J + \frac{1}{2}2\cdot 3^2 J\right) = 6J$$




β) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για το στερεό s, αμέσως μετά την κρούση και της θέσης που θα μηδενιστεί η γωνιακή του ταχύτητα, με αποτέλεσμα να σταματήσει την περιστροφή του, πριν επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του. Προφανώς η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε δυναμική, οπότε θα απαιτηθεί η γνώση του κέντρου μάζας του στερεού s, πράγμα που δεν γνωρίζουμε. Παρακάμπτουμε το πρόβλημα «σπάζοντας» το s σε ράβδο και σφαίρα $\Sigma_1$:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow 0 - \frac{1}{2}I_s\omega^2 + m_1 g y_1 + Mg y_2 = 0 \rightarrow$$

$$m_1 g(\ell - \ell\sigma\upsilon\nu\varphi) + Mg\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi\right) = \frac{1}{2}I_s\omega^2 \rightarrow$$

$$1 - \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{I_s\omega^2}{2m_1 g + Mg} \rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 1 - \frac{I_s\omega^2}{2m_1 g + Mg} \rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = 1 - \frac{2\cdot 3^2}{2\cdot 1\cdot 10 + 3\cdot 10} = \frac{16}{25} = 0,64$$

**dmargaris@gmail.com**