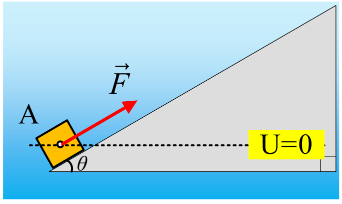
Το έργο και η Μηχανική ενέργεια



Ένα σώμα μάζας m=10kg συγκρατείται στη θέση Α ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσεως θ=30°. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω του μια σταθερή δύναμη μέτρου F=200/3 N, παράλληλη στο επίπεδο, με αποτέλεσμα το σώμα να κινείται κατά μήκος του επιπέδου κατά x_1=1,2m, φτάνοντας στην θέση Γ, οπότε η δύναμη καταργείται. Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την θέση Α, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, ενώ δίνονται g=10m/s^2, ημ30°= ½ και συν30°=√3/2.

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα, μέσω του έργου της δύναμης F.

ii) Αφού βρείτε την ταχύτητα $υ_1$ του σώματος στην θέση Γ, να υπολογίσετε την μηχανική ενέργεια του σώματος στη θέση Γ.

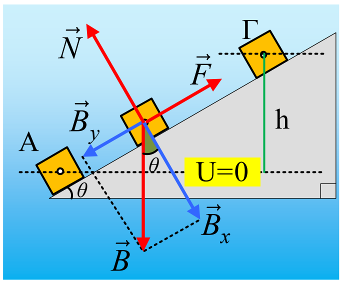
iii) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση από την αρχική θέση Α που θα φτάσει το σώμα κατά την άνοδό του στο επίπεδο.

iv) Με ποια ταχύτητα το σώμα επιστρέφει στην αρχική θέση Α;

Απάντηση:

i) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα, μέσω της δύναμης, είναι ίση με το έργο της δύναμης, κατά την μετακίνηση του σώματος από το Α στο Γ:

$$W_F = F \cdot \Delta x \cdot συν0^o = F \cdot x_1 = \frac{200}{3} \cdot 1{,}2J = 80J$$



ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπου το βάρος έχει αναλυθεί σε δύο συνιστώσες B_x, στην διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και B_y κάθετη στο επίπεδο. Η γωνία μεταξύ Β και B_y είναι ίση με θ, αφού έχει κάθετες πλευρές με την γωνία του κεκλιμένου επιπέδου, οπότε:

$$ημθ = \frac{B_x}{B} \to B_x = mg \cdot ημθ \quad και$$

$$συνθ = \frac{B_y}{B} \to B_y = mg \cdot συνθ$$

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος, μεταξύ των θέσεων Α και Γ, θα έχουμε:

$$K_Γ - K_A = W_F + W_{B_x} + W_{B_y} + W_N$$

Αλλά W_{By}=W_N=0, αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στην μετατόπιση, οπότε:

$$\frac{1}{2} mυ_1^2 - 0 = F \cdot x_1 + B_x \cdot x_1 \cdot συν180^o \to$$

$$mυ_1^2 - 0 = 2F \cdot x_1 - 2mg \cdot ημθ \cdot x_1 \to$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(F - mg\cdot\eta\mu\theta)x_1}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot\left(\frac{200}{3} - 10\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot 1{,}2}{10}}\,m/s = 2m/s$$

Στη θέση Γ, το σώμα έχει κινητική και δυναμική ενέργεια, όπου:

$$E_{\mu,1} = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mg\cdot x_1\cdot\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$E_{\mu,1} = \frac{1}{2}10\cdot 2^2 J + 10\cdot 10\cdot 1{,}2\cdot\frac{1}{2}J = 20J + 60J = 80J$$

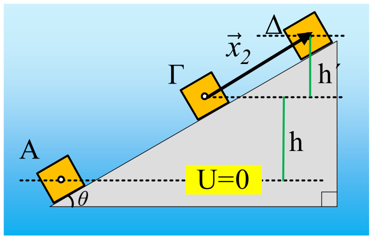
Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η μηχανική ενέργεια στην θέση Γ, είναι ίση με την ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα, μέσω του έργου της δύναμης F, αφού θεωρήσαμε μηδενική την αρχική μηχανική ενέργεια στην θέση Α.

iii) Το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης στη θέση Γ, συνεχίζει να κινείται προς τα πάνω και έστω ότι μηδενίζεται η ταχύτητά του, μετά από μετατόπιση x_2 στην θέση Δ, όπως στο σχήμα. Η μηχανική ενέργεια μεταξύ των θέσεων Γ και Δ διατηρείται, οπότε:

$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta \xrightarrow{U_A=0}$$

$$E_{M,1} = 0 + mg(h + h') \rightarrow h + h' = \frac{E_{M,1}}{mg} \rightarrow$$

$$h + h' = \frac{E_{M,1}}{mg} - h = \frac{80}{10\cdot 10}m = 0{,}8m$$



Οπότε η συνολική μετατόπιση του σώματος $x_{ολ}=x_1+x_2$, θα είναι:

$$\eta\mu\theta = \frac{h+h'}{x_{ο\lambda}} \rightarrow x_{ο\lambda} = \frac{h+h'}{\eta\mu\theta} = \frac{0{,}8m}{\frac{1}{2}} = 1{,}6m$$

iv) Εφαρμόζοντας ξανά την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Δ και Α, βρίσκουμε την ταχύτητα με την οποία επιστρέφει το σώμα στην θέση Α:

$$K_\Delta + U_\Delta = K_\Gamma + U_\Gamma \xrightarrow{U_A=0}$$

$$0 + mg(h + h') = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_A = \sqrt{2g(h+h')} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}8}\,m/s = 4m/s$$

dmargaris@gmail.com