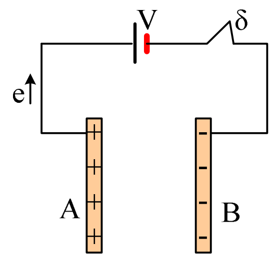
Ενέργεια πυκνωτή

Καλοκαίρι έχουμε, χαλαροί είμαστε, δεν θα παραδώσουμε και μάθημα αύριο, ας εξετάσουμε πόση είναι η ενέργεια ενός πυκνωτή, αλλά και πόση ενέργεια απαιτείται για να απομακρύνουμε τους οπλισμούς του.

Τι ονομάζουμε ενέργεια πυκνωτή;

Έστω ότι έχουμε έναν αφόρτιστο πυκνωτή και θέλουμε να τον φορτίσουμε.



Συνδέουμε μια πηγή τάσης V, κλείνουμε το διακόπτη δ, οπότε μεταφέρονται φορτία (ηλεκτρόνια) μέσω της πηγής από τον οπλισμό Α στον Β. Κατά την παραπάνω μετακίνηση, προσφέρεται ενέργεια από την πηγή στα φορτία $W_1=qV$, η οποία κατά το ήμισυ μετατρέπεται σε θερμότητα πάνω στα σύρματα σύνδεσης, ενώ το άλλο μισό αποθηκεύεται στον πυκνωτή με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\mathbf{U = \tfrac{1}{2}\, qV = \tfrac{1}{2}\, CV^2 = \tfrac{1}{2}\, q^2/C}$$

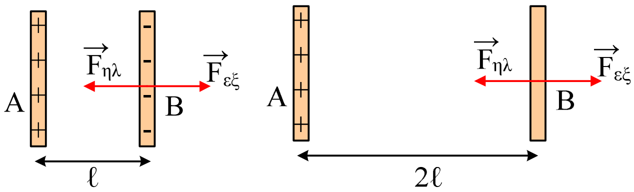
Αυτή η ενέργεια μπορεί να αποδοθεί από τον πυκνωτή, αν π.χ. βγάλουμε την πηγή και συνδέσουμε τους δύο οπλισμούς με ένα σύρμα, θα παραχθεί πάνω του θερμότητα όση είναι η ενέργεια του πυκνωτή. Η ενέργεια αυτή είναι θετική, προσέξτε τα τετράγωνα στους τύπους υπολογισμού της.

Τι ακριβώς ενέργεια είναι αυτή; Αυτή είναι δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης των φορτίων των δύο οπλισμών. Θα μπορούσαμε δηλαδή να γράψουμε:

$$\mathbf{U = U_{(+q)} + U_{(-q)} + U_{(+q,-q)} \quad (1)}$$

Όπου $U_{(+q)}$ είναι η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης των θετικών φορτίων μεταξύ τους, $U_{(-q)}$ η αντίστοιχη λόγω αλληλεπίδρασης των αρνητικών

φορτίων μεταξύ τους και $U_{(+q,-q)}$ η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης κάθε θετικού φορτίου του οπλισμού Α με τα αρνητικά φορτία του οπλισμού Β.
Οι δύο πρώτοι προσθετέοι της εξίσωσης (1) είναι θετικοί, ενώ ο τελευταίος είναι αρνητικός αφού αλληλεπιδρούν ετερώνυμα φορτία. Το άθροισμα αυτό είναι θετικό και ίσο με την ενέργεια του πυκνωτή.
Τι συμβαίνει όταν έχουμε τώρα ένα φορτισμένο πυκνωτή με φορτίο q, έχουμε αποσυνδέσει την πηγή και ασκώντας μια δύναμη στον οπλισμό Β αυξήσουμε την απόσταση μεταξύ των οπλισμών, κρατώντας στην θέση του τον οπλισμό Α;



Για διευκόλυνση της μελέτης μας, έστω ότι μιλάμε για έναν επίπεδο πυκνωτή, χωρίς διηλεκτρικό, που οι οπλισμοί του είναι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας R. Πόση ενέργεια απαιτείται για να διπλασιάσουμε την απόσταση των οπλισμών του πυκνωτή;
Εδώ θα πρέπει να τονισθεί ότι ο τύπος της χωρητικότητας ενός πυκνωτή, προκύπτει με εφαρμογή του νόμου του Gauss, θεωρώντας άπειρο το εμβαδόν κάθε οπλισμού, οπότε θα ισχύει είτε είναι μεγάλη, είτε μικρή η απόσταση μεταξύ των οπλισμών.
Έτσι διδάσκουμε στους μαθητές μας:
Διπλασιάζοντας την απόσταση των οπλισμών, η χωρητικότητα υποδιπλασιάζεται αφού $C=\varepsilon_0 \cdot S/$;, ενώ το φορτίο παραμένει σταθερό, οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας παίρνουμε:

$$\mathbf{U_{\alpha\rho\chi} + \Delta E = U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow}$$

$$\mathbf{\Delta E = U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi} = ½\, q^2/C_2 - ½\, q^2/C_1 = ½\, q^2/C_1 = U_{\alpha\rho\chi}.\ (2)}$$

Δηλαδή η ενέργεια που πρέπει να προσφέρουμε στον οπλισμό Β, μέσω του έργου της $F_{\varepsilon\xi}$ για την απομάκρυνση των οπλισμών είναι ίση με την αρχική ενέργεια του πυκνωτή.

Και αν οι οπλισμοί δεν έχουν άπειρο εμβαδόν; Ή αν θέλουμε να μεταφέρουμε τον οπλισμό Β σε πολύ μεγάλη απόσταση τι κάνουμε;

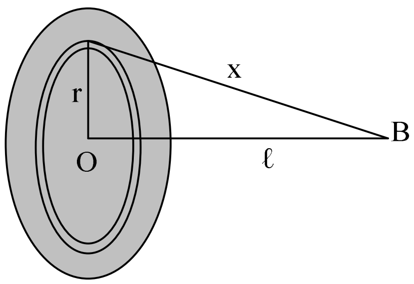
Πριν προχωρήσουμε σε μαθηματικούς υπολογισμούς θα πρέπει να τονισθεί ότι μετακινώντας τον οπλισμό Β, μεταβάλλουμε ΜΟΝΟ τον τρίτο προσθετέο της εξίσωσης (1). Δεν αλλάζει η ενέργεια αλληλεπίδρασης των φορτίων κάθε οπλισμού, αλλά μόνο η ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο οπλισμών.

Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων +q, -q;

$$U=q_B \cdot V_B$$

Όπου V_B το δυναμικό του οπλισμού Β που οφείλεται στο φορτίο του Α.

Ας το υπολογίσουμε:



Έστω ο οπλισμός Α, ένας δίσκος ακτίνας R που φέρει φορτίο q επιφανειακής πυκνότητας $\sigma = q/\pi R^2$. Παίρνοντας ένα λεπτό δακτύλιο ακτίνας r και πάχους dr, θα έχει φορτίο $dq=(2\pi r)\cdot(dr)\cdot\sigma$. Όλα τα σημεία του δακτυλίου απέχουν από το σημείο Β, που βρίσκεται πάνω στην κάθετη στο δακτύλιο στο κέντρο του, κατά απόσταση x, όπου

$$x = \sqrt{r^2 + \ell^2}$$

Οπότε το δυναμικό στο Β που οφείλεται στον δακτύλιο είναι:

$$dV = k \cdot \frac{q}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi \mathrm{r} \cdot \mathrm{dr} \cdot \sigma}{\sqrt{\mathrm{r}^2 + \ell^2}}$$

Άρα το δυναμικό στο Β προκύπτει με ολοκλήρωμα:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + \ell^2}} \longrightarrow$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+\ell^2}-\ell) \rightarrow$$

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+\ell^2}-\ell) \quad (3)$$

Συνεπώς η δυναμική ενέργεια του φορτίου του οπλισμού Β εξαιτίας του ότι είναι μέσα στο ηλεκτρικό πεδίου του Α είναι:

$$U = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+\ell^2}-\ell)$$

(Ας σημειωθεί ότι όλα τα σημεία του οπλισμού Β έχουν το ίδιο δυναμικό, αφού είναι σημεία ενός αγωγού σε στατική ισορροπία).

Έστω τώρα ότι ασκούμε μια εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$ για να απομακρύνουμε τον οπλισμό Β σε απόσταση 2;. Με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ,Ε. για την κίνηση του Β έχουμε:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}= W_{Fηλ}+W_{Fεξ} \rightarrow$$

$$0= -q(V_{αρχ}-V_{τελ}) + W_{Fεξ} \rightarrow$$

$$W_{Fεξ} =+q(V_{αρχ}-V_{τελ}) \rightarrow$$

$$W_{Fεξ} = q\left[\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+\ell^2}-\ell)-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+4\ell^2}-2\ell)\right] \rightarrow$$

$$W_{Fεξ} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+\ell^2}-\sqrt{R^2+4\ell^2}+\ell) \quad (4)$$

Αλλά σε έναν πραγματικό πυκνωτή θα πρέπει η απόσταση μεταξύ των οπλισμών να είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την ακτίνα R, οπότε R^2+;^{2} $\approx R^2$ και R^2+4;^{2} $\approx R^2$ και η (4) γίνεται:

$$W_{Fεξ} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\ell = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \frac{\pi R^2}{\ell}} \rightarrow$$

$$W_{Fεξ}= ½\, q^2/C$$

Όση ήταν και η αρχική ενέργεια του πυκνωτή.

Βρήκαμε δηλαδή ξανά αυτό που είχαμε υπολογίσει δουλεύοντας με ενέργειες πυκνωτή, σχέση (2)

Και γιατί να το κάνουμε έτσι; Υπάρχει λόγος; Μέχρι εδώ όχι. Αλλά αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που απαιτείται ώστε ο οπλισμός Β να απομακρυνθεί (να πάει στο άπειρο) από τον Α;

Έστω ξανά τώρα ότι ασκούμε μια εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$ για να απομακρύνουμε τον οπλισμό Β μέχρι το άπειρο. Με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ,Ε. για την κίνηση του Β έχουμε:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}= W_{Fηλ} +W_{Fεξ} \rightarrow$$

$$0= -q(V_{αρχ}-V_{τελ}) + W_{Fεξ} \rightarrow$$

$$W_{Fεξ} =+q(V_{αρχ}-0) \rightarrow$$

$$W_{Fεξ} = q[\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+\ell^2}-\ell)] \rightarrow$$

$$W_{Fεξ} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+\ell^2}-\ell)$$

χρησιμοποιώντας δε ξανά τις προσεγγίσεις που κάναμε και προηγουμένως παίρνουμε:

$$W_{Fεξ} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(R-\ell) \rightarrow$$

$$W_{Fεξ} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \frac{\pi R^2}{\ell}} \cdot \frac{R-\ell}{\ell}$$

$$W_{Fεξ} = U_{αρχ} \cdot \frac{R-\ell}{\ell}$$

ή

$$W_{Fεξ} = U_{αρχ} \cdot \frac{R}{\ell}$$

dmargaris@sch.gr