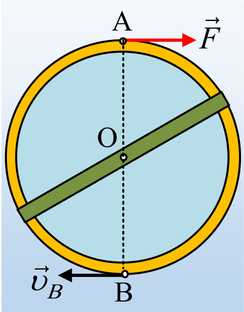
Ένα σύνθετο στερεό και οι ενέργειες



Έχουμε κατασκευάσει ένα στερεό s, καρφώνοντας σε έναν ομογενή δακτύλιο μάζας m_1=4kg (η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του) και ακτίνας R=2m, μια ομογενή ράβδο μήκους l=4m και μάζας m_2=6kg, όπως στο σχήμα, όπου το μέσον της ράβδου ταυτίζεται με το κέντρο Ο του δακτυλίου. Τοποθετούμε το στερεό s σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με το επίπεδο του δακτυλίου οριζόντιο (το σχήμα σε **κάτοψη**) και μέσω αβαρούς νήματος, το οποίο έχουμε τυλίξει γύρω από τον δίσκο, ασκούμε την στιγμή t=0 στο στερεό, μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=12N. Την στιγμή t_1=5s, το αντιδιαμετρικό του Α σημείο Β, έχει ταχύτητα μέτρου υ_B=4m/s, με κατεύθυνση αντίθετη της δύναμης, όπως στο σχήμα.

i) Να υπολογιστούν την στιγμή t_1, η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο του στερεού s, καθώς και η ταχύτητα του σημείου Α, στο οποίο καταλήγει το νήμα.

ii) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς το κέντρο μάζας της Ο.

iii) Να υπολογιστεί το έργο της ασκούμενης δύναμης F, μέχρι τη στιγμή t_1.

iv) Ποια η στιγμιαία ισχύς της δύναμης F και ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου, τη στιγμή t_1.

Η εξίσωση υπολογισμού της ροπής αδράνειας της ράβδου, δεν θεωρείται γνωστή.

Απάντηση:

i) Στο στερεό s, εκτός της οριζόντιας δύναμης F που το επιταχύνει, ασκούνται το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, οι οποίες δεν επηρεάζουν την οριζόντια κίνησή του. Αλλά τότε θεωρώντας την κίνηση του στερεού σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο Ο, παίρνουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

Μεταφορική κίνηση: $F=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = \dfrac{F}{m_1+m_2} = \dfrac{12N}{(4+6)kg} = 1,2m/s^2$.

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R = \left(m_1R^2+I_\rho\right)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (1)

Όπου θεωρήσαμε θετική φορά, την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

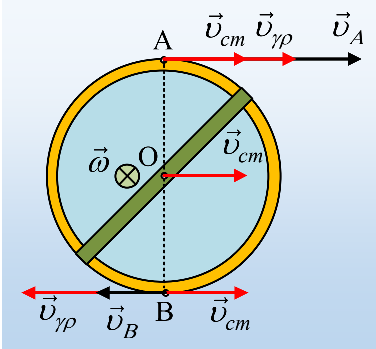
Αλλά τότε η μεταφορική κίνηση του στερεού s, είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}\cdot t \quad (2) \quad \text{και} \quad x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}\cdot t^2 \quad (3)$$

Με αντικατάσταση t=5s στην (2), υπολογίζουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας την στιγμή t_1:

$$\upsilon_{cm,1} = \alpha_{cm}\cdot t = 1,2\cdot 5m/s = 6m/s$$

Τα σημεία Α και Β του στερεού έχουν την ταχύτητα του κέντρου μάζας, λόγω της μεταφορικής κίνησης και μια γραμμική ταχύτητα, λόγω της περιστροφικής κίνησης, όπως στο σχήμα. Να σημειωθεί ότι από την σχέση (1) προκύπτει ότι το στερεό θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση, κάθετη στο επίπεδο μα φορά προς τα κάτω και την ίδια κατεύθυνση θα έχει και η γωνιακή ταχύτητα την στιγμή t_1. Αλλά τότε δουλεύοντας με τα μέτρα των ταχυτήτων του σημείου Β:



$$\upsilon_B=\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_{cm} \rightarrow \upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=\upsilon_B+\upsilon_{cm}=4m/s+6m/s=10m/s \quad (4)$$

Οπότε το σημείο Α, σημείο εφαρμογής της δύναμης F, έχει ταχύτητα της ίδιας κατεύθυνσης με την δύναμη και μέτρο:

$$\upsilon_A=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}+\omega R=6m/s+10m/s=16m/s$$

ii) Από την εξίσωση (4) παίρνουμε $\omega=\frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{R}=\frac{10}{2}rad/s=5rad/s$, οπότε κατά αναλογία της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης του κέντρου μάζας, για την στροφική κίνηση θα ισχύουν:

$$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \quad (2\alpha) \quad \kappa\alpha\iota \quad \theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 \quad (3\alpha)$$

Οπότε από την εξίσωση (2^{α}) βρίσκουμε:

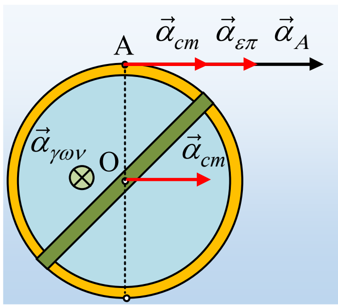
$$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\omega}{t}=\frac{5}{5}rad/s^2=1rad/s^2.$$

Και από την εξίσωση (1) θα πάρουμε:

$$F\cdot R=\left(m_1R^2+I_\rho\right)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow I_\rho=\frac{F\cdot R}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}-m_1R^2 \rightarrow$$

$$I_\rho=\left(\frac{12\cdot 2}{1}-4\cdot 2^2\right)kgm^2=8kgm^2.$$

iii) Κατά αναλογία με τις ταχύτητες, το σημείο Α στη διεύθυνση της δύναμης, έχει τις επιταχύνσεις που φαίνονται στο σχήμα, όπου α_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και $\alpha_{\varepsilon\pi}$ η επιτρόχια επιτάχυνση, άρα συνολική επιτάχυνση:



$$\alpha_A=\alpha_{cm}+a_{\gamma\omega\nu}\cdot R=1,2m/s^2+1\cdot 2m/s^2=3,2m/s^2.$$

Οπότε το σημείο εφαρμογής της δύναμης μετατοπίζεται κατά:

$$x_A=\frac{1}{2}a_A\cdot t^2$$

Συνεπώς η δύναμη F, μέχρι την στιγμή t_1 παράγει έργο:

$$W_F=F\cdot x_A=F\cdot\frac{1}{2}a_A\cdot t_1^2=12\cdot\frac{1}{2}\cdot 3,2\cdot 5^2J=480J$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του στερεού, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο πάνω στο στερεό, είναι η δύναμη F:

$$W_F = K = \frac{1}{2} m_s \upsilon_{cm,1}^2 + \frac{1}{2} I_s \cdot \omega_1^2$$

Όπου $I_s = m_1 R^2 + I_\rho = 4 \cdot 2^2 kgm^2 + 8kgm^2 = 24kgm^2$. Έτσι:

$$W_F = \frac{1}{2} m_s \upsilon_{cm,1}^2 + \frac{1}{2} I_s \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 6^2 J + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5^2 J = 480J$$

iv) Για την ισχύ της δύναμης, την στιγμή t_1 έχουμε:

$$P_F = F \cdot \upsilon_A = F \cdot a_A \cdot t_1 = 12 \cdot 3,2 \cdot 5W = 192W$$

Ενώ για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της **ράβδου**, έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \left(\frac{dK}{dt}\right)_\mu + \left(\frac{dK}{dt}\right)_\sigma \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F_\rho \cdot \upsilon_{cm,\rho} + \Sigma \tau_\rho \cdot \omega = m_2 a_{cm} \cdot \upsilon_{cm,\rho} + I_\rho \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = 6 \cdot 1,2 \cdot 6J/s + 8 \cdot 1 \cdot 5J/s = 83,2J/s$$

dmargaris@gmail.com