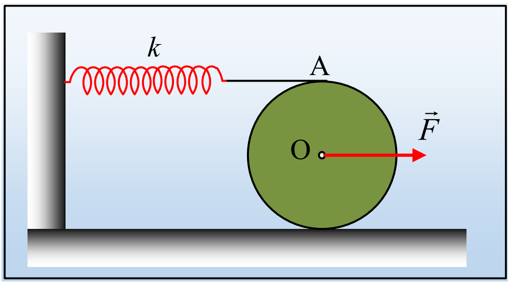
Όταν τυλίγεται το νήμα, το ελατήριο επιμηκύνεται



Ο κύλινδρος του σχήματος, μάζας m=4kg και ακτίνας R=0,1m ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Γύρω του έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, το οποίο συνδέεται με οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k=20N/m, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του, ενώ το άλλο άκρο του έχει στερεωθεί σε κατακόρυφο τοίχο. Σε μια στιγμή στο κέντρο μάζας Ο του κυλίνδρου ασκείται (με κατάλληλο τρόπο) μια σταθερή οριζόντια δύναμη F μέτρου F=23N, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να κυλίεται και μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, ο άξονας του κυλίνδρου να έχει μετατοπισθεί κατά x_1=0,2m. Για την στιγμή αυτή ζητούνται:

i) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

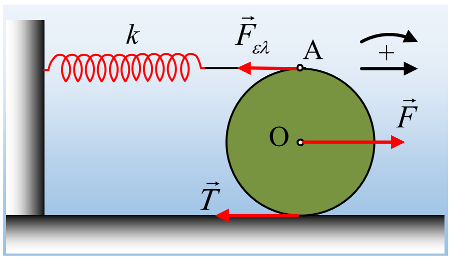
ii) Η ενέργεια που έχει μεταφερθεί, μέχρι τη στιγμή αυτή, στον κύλινδρο, μέσω του έργου της δύναμης F, καθώς και η ταχύτητα του ανώτερου σημείου Α του κυλίνδρου.

iii) Η ισχύς της δύναμης F, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου.

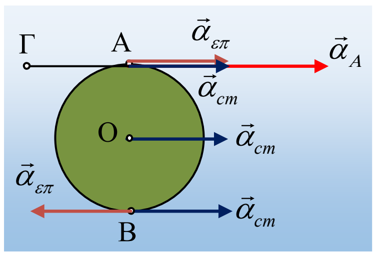
Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του I_{cm}= ½ mR^2.

Απάντηση:



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται σε μια τυχαία θέση στον κύλινδρο. Ο κύλινδρος θα κινηθεί προς τα δεξιά και για να κυλίεται θα πρέπει να περιστραφεί ωρολογιακά, όπως έχει σημειωθεί στο σχήμα.

i) Θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορά και μια περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Ο και ενώνει τα κέντρα των δύο βάσεων του κυλίνδρου, παίρνουμε με εφαρμογή του 2^ου^ νόμου του Νεύτωνα:



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F - F_{ελ} - T = m\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_O = I_{cm}\cdot\alpha_{γων} \rightarrow T\cdot R - F_{ελ}\cdot R = ½\, mR^2\cdot\alpha_{γων} \rightarrow$

$$T - F_{ελ} = ½\, mR\cdot\alpha_{γων} \quad (2)$$

Ενώ ισχύει, λόγω κύλισης, και $\alpha_{cm} = \alpha_{γων}\cdot R$ (3)

Με βάση το διπλανό σχήμα, το σημείο Β επαφής με το έδαφος έχει μηδενική επιτάχυνση, ενώ αντίθετα το ανώτερο σημείο Α του κυλίνδρου, έχει επιτάχυνση:

$$\alpha_A = \alpha_{cm} + \alpha_{επ} = \alpha_{cm} + \alpha_{γων}R = 2\alpha_{cm}.$$

Αλλά αν κάθε στιγμή το σημείο Α έχει διπλάσια επιτάχυνση από το κέντρο Ο, τότε και η μετατόπισή του, θα είναι διπλάσια της μετατόπισης του Ο, κάθε στιγμή. Έτσι τη στιγμή t_1 που το Ο έχει μετατοπισθεί κατά x_1, το Α έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x_A=2x_1=0,4m$, ίση με την μετατόπιση και του σημείου Γ, του άκρου του ελατηρίου. Συνεπώς τη στιγμή t_1 το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell=0,4m$, ασκώντας στον κύλινδρο δύναμη μέτρου:

$$F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta\ell=20\cdot 0,4N=8N$$

Αλλά τότε με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη, με την βοήθεια και της (3) παίρνουμε:

$$F-2F_{\varepsilon\lambda}=\frac{3}{2}ma_{cm} \quad \to \ a_{cm}=\frac{2(F-2F_{\varepsilon\lambda})}{3m}=\frac{2(23-2\cdot 8)}{3\cdot 4}m/s^2=\frac{7}{6}m/s^2.$$

Και από την σχέση (3):

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{a_{cm}}{R}=\frac{7}{6\cdot 0,1}rad/s^2=\frac{35}{3}rad/s^2.$$

ii) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο μέσω του έργου της δύναμης F, είναι ίση με το έργο της:

$$W_F=F\cdot x_1=23\cdot 0,2J=4,6J$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε, για τον κύλινδρο παίρνουμε:

$$K_1-K_0=W_w+W_N+W_F+W_\tau+W_{F\varepsilon\lambda} \quad (4)$$

Όμως για την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή t_1 έχουμε:

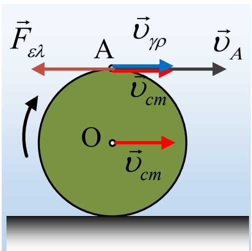
$$K_1=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I\omega_1^2=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega_1^2 \xrightarrow{\upsilon_1=\omega_1 R} K_1=\frac{3}{4}m\upsilon_1^2$$

Ενώ $W_N=W_w=0$ δυνάμεις κάθετες στην μετατόπιση, $W_T=0$, το σημείο εφαρμογής της δεν μετακινείται,

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}}=-\Delta U=-\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2=-\frac{1}{2}20\cdot 0,4^2J=-1,6J \xrightarrow{(4)}$$

$$\frac{3}{4}m\upsilon_1^2-0=4,6J-1,6J\to \upsilon_1=1m/s$$

Οπότε το σημείο Α, έχει τις ταχύτητες υ_{cm} λόγω μεταφοράς και $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=\upsilon_{cm}$, λόγω περιστροφής, συνολικά δηλαδή:



$$\upsilon_A=2\upsilon_{cm}=2m/s$$

iii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, έργο πάνω στον κύλινδρο παράγουν μόνο η δύναμη F και η δύναμη του ελατηρίου. Για την ισχύ κάθε δύναμης (στο σχήμα φαίνεται η δύναμη του ελατηρίου, η οποία ασκείται στο σημείο Α) έχουμε:

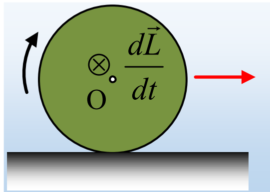
$$P_F=F\cdot\upsilon_{cm}=23\cdot 1W=23W$$

$$P_{F_{\varepsilon\lambda}}=-F_{\varepsilon\lambda}\cdot\upsilon_A=-8\cdot 2W=-16W$$

Αλλά αν η δύναμη μεταφέρει ενέργεια 23J/s στον κύλινδρο και η δύναμη του ελατηρίου αφαιρεί τα 16J/s, σημαίνει ότι η ενέργεια του κυλίνδρου αυξάνεται κατά 7J/s. Έχουμε δηλαδή:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{ολ}}{dt}=P_F+P_{F_{ελ}}=23J/s-16J/s=7J/s$$

iv) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\frac{dL_{cm}}{dt}=\Sigma\tau_o=T\cdot R-F_{ελ}\cdot R=I_{cm}\cdot a_{γων}=\frac{1}{2}mR^2\cdot a_{γων}$$

$$\frac{dL_{cm}}{dt}=\frac{1}{2}mR^2\cdot a_{γων}=\frac{1}{2}4\cdot 0,1^2\cdot\frac{35}{3}kgm^2/s^2=\frac{7}{30}kgm^2/s^2.$$

Ο παραπάνω ρυθμός είναι διάνυσμα στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου, με φορά προς τα μέσα, όπως στο διπλανό σχήμα.

dmargaris@gmail.com