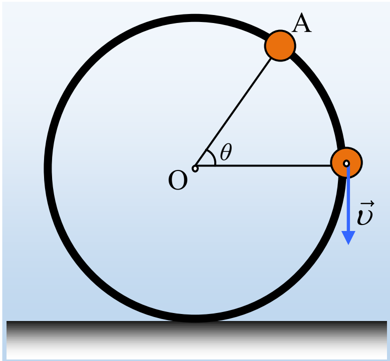
Οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων

Σε σημείο Α ενός δακτυλίου, ακτίνας R=0,5m και μάζας m=1kg, την οποία θεωρούμε συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, έχει στερεωθεί ένα σημειακό σφαιρίδιο της ίδιας μάζας m, δημιουργώντας ένα στερεό S. Το στερεό τοποθετείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και αφήνεται να κινηθεί από την θέση του σχήματος, όπου η ακτίνα ΟΑ σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, τη στιγμή $t_0=0$. Τη στιγμή t_1 που η ακτίνα ΟΑ γίνεται οριζόντια, το σφαιρίδιο έχει ταχύτητα μέτρου υ=2m/s.



i) Να υπολογισθούν την παραπάνω στιγμή t_1:

α) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού S.

β) Η κινητική ενέργεια του σφαιριδίου

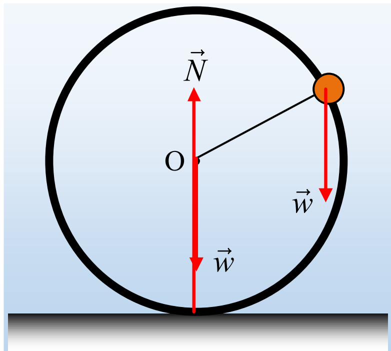
γ) Η κινητική ενέργεια του δακτυλίου.

ii) Η γωνία θ που σχηματίζει η αρχική διεύθυνση της ακτίνας, με την οριζόντια διεύθυνση.

Δίνεται ότι το κέντρο μάζας του στερεού είναι στο μέσον της ακτίνας ΟΑ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

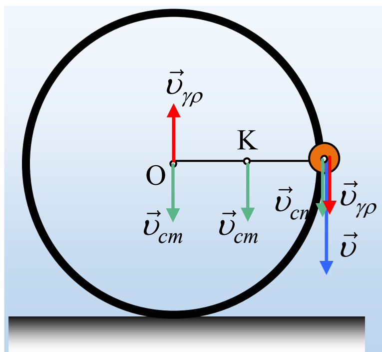
Στο στερεό S ασκούνται οι δυνάμεις του διπλανού σχήματος, όλες κατακόρυφες, οπότε η ορμή στην οριζόντια διεύθυνση παραμένει σταθερή. Έτσι με εφαρμογή της ΑΔΟ στην οριζόντια διεύθυνση, μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων παίρνουμε (Μ η μάζα του στερεού S):



$$\vec{p}_{S,x0} = \vec{p}_{S,x1} \rightarrow M \cdot 0 = M \cdot u_{cm,x} \rightarrow u_{cm,x} = 0$$

Δηλαδή στη θέση που η ακτίνα ΟΑ γίνεται οριζόντια, η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ, στο μέσον της ακτίνας, αφού έχουμε ίσες μάζες, είναι κατακόρυφη, όπως στο σχήμα.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν εφαρμόσουμε το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας Κ:



$$\Sigma\vec{F} = m_{o\lambda}\vec{\alpha}_{cm}$$

Όπου, αφού οι ασκούμενες δυνάμεις είναι συνεχώς κατακόρυφες και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας θα είναι διαρκώς κατακόρυφη και κατακόρυφη θα είναι και η ταχύτητά του τη στιγμή που η ακτίνα ΟΑ γίνεται οριζόντια.

Αλλά τότε, θεωρώντας την κίνηση του στερεού S ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Κ, το κέντρο Ο του δακτυλίου θα έχει τις ταχύτητες που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα και αφού έχει μηδενική ταχύτητα, θα ισχύει ότι:

$$\upsilon_{cm} = \omega \cdot \frac{R}{2} \quad (1)$$

i) α) Για την ταχύτητα του σφαιριδίου, ίση με την ταχύτητα του σημείου Α έχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow \upsilon = \upsilon_{cm} + \omega \cdot \frac{R}{2} \rightarrow \upsilon = 2\upsilon_{cm} \rightarrow$$

$$\upsilon_{cm} = \frac{\upsilon}{2} = \frac{2}{2} m/s = 1 m/s$$

β) Το σφαιρίδιο, ένα υλικό σημείο έχει κινητική ενέργεια:

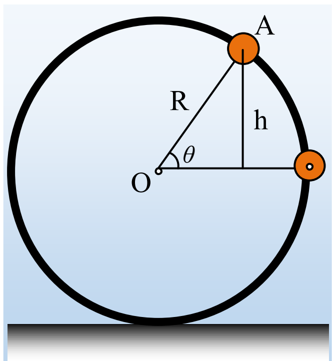
$$K_\sigma = K_1 = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2^2 J = 2J$$

γ) Το κέντρο Ο (και κέντρο μάζας) του δακτυλίου έχει μηδενική ταχύτητα, την στιγμή t_1, οπότε η κίνησή του είναι (στιγμιαία) στροφική, έχοντας κινητική ενέργεια:

$$K_\delta = K_2 = \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 + \frac{1}{2} I_{cm.\delta}\omega^2 = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m\left(2\upsilon_{cm}\right)^2 = 2m\upsilon_{cm}^2 = 2 \cdot 1 \cdot 1^2 J = 2J$$

ii) Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα, μεταξύ των θέσεων που βρίσκεται τις χρονικές στιγμές $t_0=0$ και t_1, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο Ο του δίσκου, θα έχουμε:



$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$0 + mgh = K_1 + K_2 \rightarrow$$

$$h = \frac{K_1 + K_2}{mg} = \frac{2J + 2J}{1 \cdot 10N} = 0,4m$$

Οπότε για την ζητούμενη γωνία θ του σχήματος θα έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{h}{R} = \frac{0,4m}{0,5m} = 0,8$$

(προφανώς μπορούμε να δώσουμε την γωνία θ, αν έχουμε ένα κομπιουτεράκι, διαφορετικά η απάντησή μας θα μείνει στο ημθ, όπως εδώ…)

Σχόλια:

Παραπάνω υπολογίσαμε χωριστά τις κινητικές ενέργειες των δύο σωμάτων (αφού έτσι μας ζητήθηκε). Θα μπορούσαμε όμως να εργαστούμε μόνο με την ενέργεια του στερεού S, χωρίς να το «σπάμε» σε δύο σώματα και να το αντιμετωπίζουμε σαν «σύστημα σωμάτων». Έτσι:

1) Η κινητική ενέργεια του στερεού, είναι ίση:

$$K_S = \frac{1}{2} m_{o\lambda} \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2} 2m \cdot \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\left(mR^2 + m\frac{R^2}{4}\right) + m\frac{R^2}{4}\right)\omega^2 \rightarrow$$

$$K_S = \frac{1}{2} 2m \cdot \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2} mR^2\omega^2 = m \cdot \upsilon_{cm}^2 + 3m \cdot \upsilon_{cm}^2 = 4m \cdot \upsilon_{cm}^2 \rightarrow$$

$$K_S = 4 \cdot 1 \cdot 1^2 J = 4J$$

2) Η ΑΔΜΕ θα μπορούσε να εφαρμοστεί και με τη μορφή:

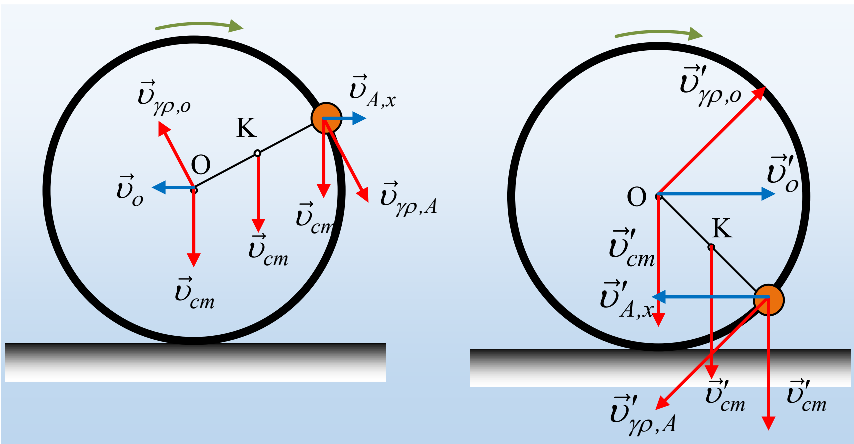
$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$0 + mgh = K_S \rightarrow$$

$$h = \frac{K_S}{mg} = \frac{4J}{1 \cdot 10N} = 0{,}4m$$

Το τι είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε σε κάθε περίπτωση, εξαρτάται από τι μας φαίνεται ευκολότερο…

3) Το ότι παραπάνω βρήκαμε την ταχύτητα του κέντρου Ο του δακτυλίου μηδενική, δεν σημαίνει ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης αυτή είναι μηδενική. Θεωρώντας την κίνηση του στερεού s ως σύνθετη, ας πάρουμε την ακτίνα ΟΑ σε δυο θέσεις μια πριν αυτή να γίνει οριζόντια και μια μετά, όπως στο σχήμα:



Το κέντρο μάζας Κ του στερεού έχει διαρκώς κατακόρυφη ταχύτητα υ_{cm}, όχι το κέντρο Ο του δακτυλίου, ούτε η σημειακή μάζα στο σημείο Α. Στην πρώτη θέση το Ο έχει οριζόντια ταχύτητα προς τα αριστερά, ίσου μέτρου με την οριζόντια ταχύτητα του σφαιριδίου $\vec{\upsilon}_{A,x}$, ενώ στην δεύτερη θέση, το σφαιρίδιο έχει οριζόντια ταχύτητα προς τα αριστερά και ο δακτύλιος ίσου μέτρου, προς τα δεξιά. Σε κάθε θέση βέβαια η ολική ορμή στην οριζόντια διεύθυνση είναι μηδενική, αφού οι ασκούμενες δυνάμεις στο σύστημα των δύο σωμάτων είναι κατακόρυφες και δεν μπορούν να μεταβάλουν την ορμή στην οριζόντια διεύθυνση…

dmargaris@gmail.com