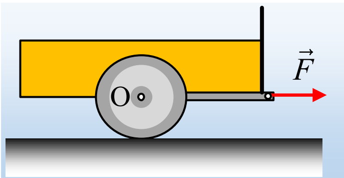
Σέρνοντας μια ρυμούλκα



Στο σχήμα βλέπετε μια μικρή ρυμούλκα η οποία έχει προσδεθεί σε αυτοκίνητο και η οποία έχει συνολική μάζα M=120kg. Αυτή έχει προφανώς δύο τροχούς, αλλά για τις ανάγκες του προβλήματος θεωρείστε ότι έχει μόνο έναν τροχό μάζας m=40kg και ακτίνας R=0,5m. Σε μια στιγμή ο οδηγός θέτει σε κίνηση το αυτοκίνητο προσδίδοντάς του σταθερή επιτάχυνση $α_1=2m/s^2$, κινούμενο σε ευθύ οριζόντιο δρόμο, οπότε ο τροχός της ρυμούλκας κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει).

i) Να υπολογιστεί η δύναμη F, οριζόντιας διεύθυνσης, την οποία ασκεί το αυτοκίνητο στην ρυμούλκα.

ii) Την χρονική στιγμή t_1=10s, να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το αυτοκίνητο στην ρυμούλκα.

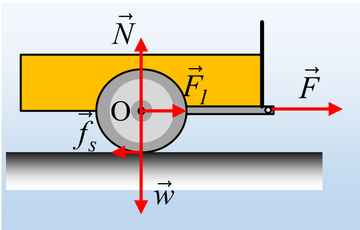
β) Η κινητική ενέργεια του τροχού, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού.

γ) Ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού, λόγω περιστροφής;

iii) Τη στιγμή t_1 ο οδηγός φρενάρει, με αποτέλεσμα το αυτοκίνητο να αποκτήσει σταθερή επιβράδυνση και να μειωθεί η ταχύτητά του στο μισό, σε χρονικό διάστημα Δt=2s. Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται η ρυμούλκα από το αυτοκίνητο στην διάρκεια του φρεναρίσματος, αν ο τροχός του συνεχίζει να κυλίεται.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του I= ½ mR^2.

Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό, όπου F_1 η δύναμη από τον άξονα (από την καρότσα της ρυμούλκας), ενώ F η δύναμη που ασκείται στην ρυμούλκα από το αυτοκίνητο. Θεωρώντας την κίνηση του τροχού ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική, παίρνουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα (η προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική όπως θετική και η δεξιόστροφη φορά περιστροφής):

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_{cm} = ma_{cm} \rightarrow F_1 - f_s = ma_{cm} \quad (1)$

Περιστροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow f_s\cdot R = \frac{1}{2}mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow f_s = \frac{1}{2}mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$

Όπου f_s η στατική τριβή που ασκείται στον τροχό από τον δρόμο. Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται θα έχουμε και:

$$\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}\cdot R \quad (3)$$

Λόγω δράσης – αντίδρασης ο τροχός ασκεί στην καρότσα της ρυμούλκας την αντίδραση της F_1, οριζόντια δύναμη με φορά προς τα αριστερά, οπότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, για την καρότσα, (η οποία έχει μάζα m_1=M-m=80kg) μας δίνει:

$$\Sigma F_{cm} = m_1 a_{1cm} \xrightarrow{a_{cm}=a_{1cm}} F - F_1 = m_1 a_{cm} \quad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων (1), (2) και (4) και με την βοήθεια της (3) παίρνουμε:

$$F_1 - f_s + f_s + F - F_1 = ma_{cm} + \frac{1}{2}ma_{cm} + m_1 a_{cm} \rightarrow$$

$$F = \left(\frac{3}{2}m + m_1\right)a_{cm} = \left(\frac{3}{2}\cdot 40 + 80\right)\cdot 2N = 280N$$

ii) Τη στιγμή t_1 η ταχύτητα του αυτοκινήτου (και της ρυμούλκας…) είναι ίση:

$$\upsilon_1 = \alpha_{cm}\cdot t = 2\cdot 10m/s = 20m/s$$

α) Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το αυτοκίνητο στην ρυμούλκα, είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης F:

$$\frac{dE}{dt} = P_F = F\cdot\upsilon_1 = 280\cdot 20W = 5.600W$$

β) Ο τροχός έχει κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \xrightarrow{\upsilon_1=\upsilon_{cm}=\omega R}$$

$$K_1 = \frac{3}{4}m\upsilon_1^2 = \frac{3}{4}40\cdot 20^2 J = 12.000J$$

Εξάλλου από τις εξισώσεις (1) και (2), βρίσκουμε για τα μέτρα των δυνάμεων:

$$f_s = \frac{1}{2}mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2}m\alpha_{cm} = \frac{1}{2}40\cdot 2N = 40N \text{ και}$$

$$F_1 - f_s = ma_{cm} \rightarrow F_1 = f_s + ma_{cm} = 40N + 40\cdot 2N = 120N$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η στατική τριβή f_s δεν παράγει έργο, αφού ασκείται σε σημείο με μηδενική ταχύτητα, η κινητική ενέργεια του τροχού μεταβάλλεται λόγω του έργου της δύναμης F_1.

Έτσι για τον ζητούμενο ρυθμό έχουμε:

$$\frac{dK_1}{dt} = P_{F_1} = F_1\cdot\upsilon_1 = 120\cdot 20J/s = 2.400J/s$$

γ) Η περιστροφική κινητική ενέργεια του τροχού, μεταβάλλεται εξαιτίας της ροπής της τριβής:

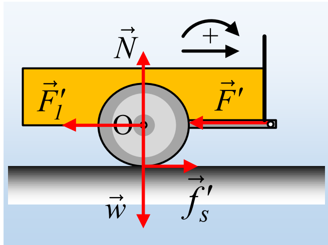
$$\frac{dK_{\pi,1}}{dt} = P_\tau = \tau\cdot\omega = \left(f_s R\right)\cdot\omega = f_s\cdot\left(R\omega\right) = f_s\cdot\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\frac{dK_{\pi,1}}{dt} = 40\cdot 20J/s = 800J/s$$

iii) Στη διάρκεια του φρεναρίσματος το σύστημα κινείται με επιτάχυνση:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{10-20}{2}m/s^2 = -5m/s^2.$$

Οπότε δουλεύοντας όπως στο i) ερώτημα, παίρνουμε:



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_{cm} = ma_{1cm} \to -F_1' + f_s' = ma_1 \quad (1\alpha)$

Περιστροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to$

$$\Sigma\tau = -f_s' \cdot R = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to -f_s' = \frac{1}{2}mR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2\alpha)$$

Και για την καρότσα: $\Sigma F_{cm} = m_1 a_{cm} \xrightarrow{a_{cm}=a_1} F' + F_1'' = m_1 a_1 \quad (4\alpha)$

Όπου η F_1'' η αντίδραση της F_1'. Από τις παραπάνω εξισώσεις, με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$-F_1' + f_s' - f_s' + F' + F_1'' = ma_1 + \frac{1}{2}ma_1 + m_1 a_1 \to$$
$$F' = \left(\frac{3}{2}m + m_1\right)a_1 = \left(\frac{3}{2}40 + 80\right) \cdot (-5)N = -700N$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η δύναμη που ασκεί το αυτοκίνητο στην ρυμούλκα, έχει φορά προς τα αριστερά.

dmargaris@gmail.com