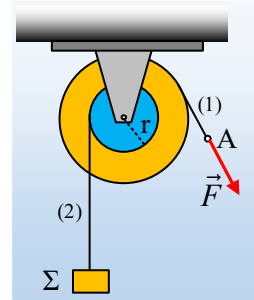


Τα έργα και οι ενέργειες σε ένα σύστημα

Η συμπαγής και ομογενής τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M=20\text{kg}$, ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και φέρει ομόκεντρη κυκλική προεξοχή ακτίνας $r=0,1\text{m}$. Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει ένα νήμα αμελητέας μάζας (1), στο άκρο A του οποίου μπορούμε να ασκούμε μια δύναμη F , ενώ γύρω από την προεξοχή έχουμε τυλίξει ένα δεύτερο αβαρές νήμα (2), στο άκρο του οποίου κρέμεται ένα σώμα Σ . Σε μια στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ , ενώ ταυτόχρονα ασκούμε σταθερή δύναμη $F=34\text{N}$, στο άκρο A του πρώτου νήματος, όπως στο σχήμα, οπότε το σώμα Σ ανεβαίνει. Τη στιγμή t_1 το άκρο A του νήματος έχει ταχύτητα $v_A=0,8\text{m/s}$, ενώ η τροχαλία έχει περιστραφεί κατά γωνία $\theta=2\text{rad}$.



- i) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F , μέχρι τη στιγμή t_1 , καθώς και η ισχύς της δύναμης την στιγμή t_1 .
- ii) Πόση είναι η κινητική ενέργεια της τροχαλίας την στιγμή t_1 ;
- iii) Να βρεθεί η ενέργεια που μεταφέρεται μέσω του νήματος, από την τροχαλία στο σώμα Σ .
- iv) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Σ .

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της $I = \frac{1}{2} MR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Η δύναμη F , μέσω του νήματος, μεταφέρεται στην τροχαλία, στο σημείο B, ασκώντας ροπή ως προς τον άξονά της, μέτρου $\tau=FR$, οπότε το έργο της για περιστροφή κατά θ της τροχαλίας, θα είναι:

$$W_F = \tau \cdot \theta = FR \cdot \theta = 34 \cdot 0,2 \cdot 2\text{J} = 13,6\text{J}$$

Ενώ η αντίστοιχη ισχύς της δύναμης την στιγμή t_1 είναι ίση:

$$P_{F_1} = F \cdot v_B = F \cdot v_A = 34 \cdot 0,8\text{W} = 27,2\text{W}$$

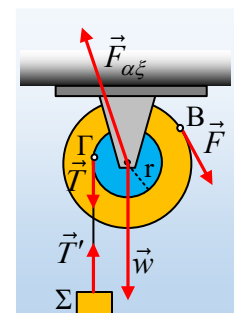
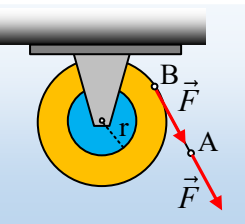
- ii) Για την γωνιακή ταχύτητα ω της τροχαλίας την στιγμή t_1 έχουμε:

$$v_B = \omega R \rightarrow \omega = \frac{v_B}{R} = \frac{v_A}{R} = \frac{0,8}{0,2}\text{rad/s} = 4\text{rad/s}$$

Συνεπώς η τροχαλία θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_I = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} \cdot 20 \cdot 0,2^2 \cdot 4^2\text{J} = 3,2\text{J}$$

- iii) Αν μέσω του έργου της δύναμης μεταφέρθηκε στην τροχαλία ενέργεια $13,6\text{J}$ και αυτή έχει ενέργεια $3,2\text{J}$, τότε η διαφορά ενέργειας $13,6\text{J}-3,2\text{J}=10,4\text{J}$ μεταφέρεται στο σώμα Σ , μέσω του νήματος (2) που το συνδέει με την τροχαλία. Ισοδύναμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ΘΜΚΕ για την τροχαλία, λαμβάνοντας υπόψη ότι έργο παράγουν μόνο η δύναμη F και η τάση T του νήματος (2):



$$K_I - K_0 = W_F + W_T \rightarrow W_T = K_I - W_F \rightarrow$$

$$W_T = 3,2J - 13,6J = -10,4J$$

Το παραπάνω έργο μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται μέσω του έργου της T' , με την βοήθεια του κατακόρυφου νήματος, από την τροχαλία στο σώμα Σ .

- iv) Η παραπάνω ενέργεια των $10,2J$ προκάλεσε αύξηση της ενέργειας του σώματος Σ , η οποία κατά ένα μέρος αυξάνει την δυναμική του ενέργεια, ενώ το υπόλοιπο εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια. Αν λοιπόν το Σ ανέβη κατά h , και έχει ταχύτητα v_1 , τότε θα έχουμε:

$$W_{T'} = \Delta E_{\Sigma} = \Delta U + \Delta K \rightarrow W_{T'} = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (1)$$

Αλλά το σώμα Σ ανέρχεται όσο και το μήκος του νήματος (2) που μαζεύεται:

$$h = \Delta \ell_2 = \theta \cdot r = 2 \cdot 0,1m = 0,2m$$

Ενώ η ταχύτητα v_1 του σώματος Σ , είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Γ της τροχαλίας:

$$v_1 = v_{\gamma\rho,\Gamma} = \omega \cdot r = 4 \cdot 0,1m/s = 0,4m/s$$

Οπότε με αντικατάσταση στην σχέση (1) βρίσκουμε:

$$W_{T'} = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow m = \frac{W_{T'}}{gh + \frac{1}{2}v_1^2} \rightarrow$$

$$m = \frac{10,2}{10 \cdot 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,4^2} kg = 5kg$$

dmargaris@gmail.com