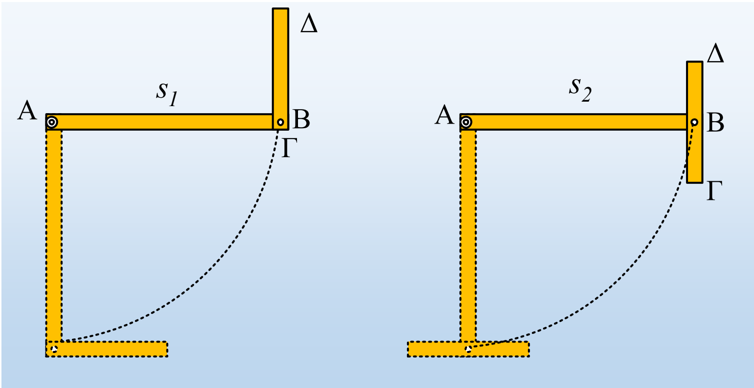
Δύο κάθετες ράβδοι στρέφονται

Με δυο ομογενείς ράβδους ΑΒ και ΓΔ μπορούσε να κατασκευάσουμε δύο στερεά. Στο στερεό s_1 η ράβδος ΓΔ καρφώνεται στο άκρο Β, σχηματίζοντας ορθή γωνία, ενώ στο στερεό s_2 το άκρο Β της πρώτης, καρφώνεται στο μέσον της ράβδου ΓΔ, με κάθετες τις ράβδους.



Τα δυο στερεά μπορούν να περιστρέφονται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο Α. Φέρνουμε τα στερεά σε θέση, όπου η ράβδος ΑΒ είναι οριζόντια, όπως στο σχήμα και τα αφήνουμε να κινηθούν.

i) Μεγαλύτερη αρχική γωνιακή επιτάχυνση, αποκτά:

α) Το στερεό s_1, β) το στερεό s_2, γ) Αποκτούν ίσες γωνιακές επιταχύνσεις.

ii) Τη στιγμή που η ράβδος ΑΒ γίνεται κατακόρυφη:

Α) Τα δύο στερεά έχουν αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια ή όχι;

Β) Για τις κινητικές ενέργειες των δύο στερεών ισχύει:

α) $K_1 < K_2$, β) $K_1 = K_2$, γ) $K_1 > K_2$.

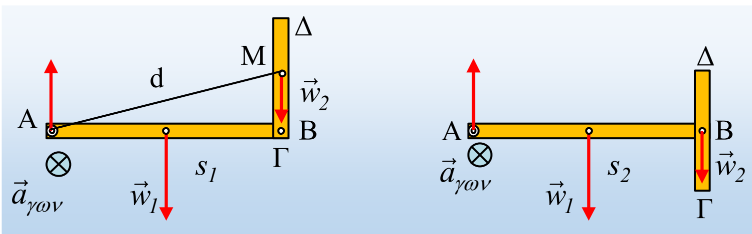
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο για ένα στερεό, όπως τα παραπάνω, μόλις αφεθεί να περιστραφεί:

$$\Sigma\tau = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau_{w_1} + \tau_{w_2} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Όμως οι ροπές των δύο βαρών ως προς τους άξονες, με βάση το παρακάτω σχήμα, είναι ίσες.



Αλλά τότε με βάση την σχέση (1) μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση θα αποκτήσει το στερεό με την μικρότερη ροπή αδράνειας, όπου:

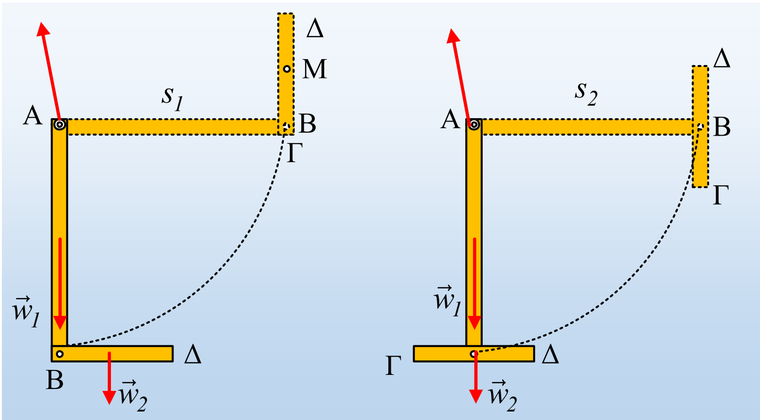
$$I_{s_1} = I_{AB} + I_{\Gamma\Delta} = I_{AB} + \left(I_{cm} + m_2 d^2 \right) \qquad (2)$$

$$I_{s_2} = I_{AB} + I_{\Gamma\Delta} = I_{AB} + \left(I_{cm} + m_2 (AB)^2 \right) \quad (3)$$

Με τις παρενθέσεις να δίνουν τη συνεισφορά στη ροπή αδράνειας της ράβδου ΓΔ, με I_{cm} η ροπή αδράνειας ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Μ.

Με σύγκριση των σχέσεων (2) και (3), αφού d=(AM) > (AB), η ροπή αδράνειας του στερεού s_1 είναι μεγαλύτερη, συνεπώς το στερεό αυτό θα αποκτήσει την μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση και σωστό το β).

ii) Έστω l_1 το μήκος της ράβδου ΑΒ και l_2 της ράβδου ΓΔ. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο στερεά, τη στιγμή που η ράβδος ΑΒ γίνεται κατακόρυφη.



Α) Με βάση τις δυνάμεις, βλέπουμε ότι το στερεό s_2 στην θέση αυτή $\Sigma\tau_A = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι το στερεό έχει μηδενική γωνιακή επιτάχυνση. Πριν την θέση αυτή το στερεό επιταχύνεται στροφικά, ενώ στη συνέχεια επιβραδύνεται, άρα στην θέση αυτή έχει την μέγιστη γωνιακή του ταχύτητα, άρα και την μέγιστη κινητική του ενέργεια.

Αντίθετα στο πρώτο σχήμα στο στερεό s_1, ασκείται ροπή $\tau_1 = w_2 \cdot \frac{1}{2} l_2$ η οποία συνεχίζει να επιταχύνει δεξιόστροφα το στερεό, αυξάνοντας και την κινητική του ενέργεια, το οποίο δεν έχει αποκτήσει ακόμη την μέγιστη κινητική του ενέργεια.

Β) Εφαρμόζουμε για κάθε στερεό την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ των δύο θέσεων του σχήματος, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το άκρο Β, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας:

Στερεό s_1:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m_1 g \ell_1 + m_2 g\left(\ell_1 + \frac{\ell_2}{2} \right) = K_{s_1} + m_1 g \frac{\ell_1}{2} \rightarrow$$

$$K_{s_1} = m_1 g \frac{\ell_1}{2} + m_2 g \left(\ell_1 + \frac{\ell_2}{2} \right) \quad (4)$$

Στερεό s_2:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m_1 g \ell_1 + m_2 g \ell_1 = K_{s_2} + m_1 g \frac{\ell_1}{2} \rightarrow$$

$$K_{s_2} = m_1 g \frac{\ell_1}{2} + m_2 g \ell_1 \quad (5)$$

Από την σύγκριση των σχέσεων (4) και (5) προκύπτει ότι το στερεό s_1 έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια στην θέση αυτή. Σωστό το γ).

dmargaris@gmail.com