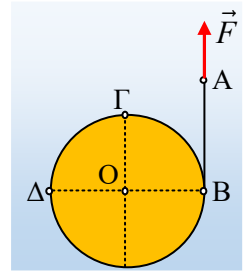


### Τρεις ερωτήσεις για ένα γιο-γιο

Γύρω από ένα ομογενή κύλινδρο μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$  τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άκρο  $A$  του οποίου ασκούμε μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη μέτρου  $F$  για  $t_0=0$  και ταυτόχρονα αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο να κινηθεί, όπως στο σχήμα. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής στο  $O$ ,  $I = \frac{1}{2} mR^2$ .



1) Αν  $F=mg$ , ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες για τις επιταχύνσεις μόλις αφηθεί ελεύθερος ο κύλινδρος (για  $t=0^+$ ):

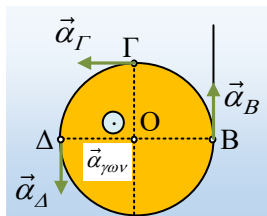
- α) Το σημείο  $B$ , που καταλήγει το νήμα, έχει μηδενική επιτάχυνση.
- β) Η επιτάχυνση του σημείου  $\Delta$ , αντιδιαμετρικού του  $B$ , έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα κάτω, μέτρου  $2g$ .
- γ) Η επιτάχυνση του σημείου  $\Gamma$ , στο άκρο μιας κατακόρυφης ακτίνας, είναι οριζόντια.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

#### Απάντηση:

Η ασκούμενη δύναμη  $F$ , μεταφέρεται μέσω του νήματος και ασκείται στον κύλινδρο στο σημείο  $B$ , όπως στο σχήμα. Από τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου, παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \rightarrow mg - F = ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = 0$$



Δηλαδή το κέντρο μάζας  $O$  παραμένει ακίνητο, ενώ ο κύλινδρος αποκτά γωνιακή επιτάχυνση, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα έξω, όπως στο σχήμα, η οποία επιταχύνει στροφικά τον κύλινδρο, με φορά αντιωρολογιακή. Αλλά τότε όλα τα σημεία που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, έχουν επιτρόχια επιτάχυνση, μέτρου  $a_{επ} = a_{γων}R$ . Εξάλλου από τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για την

στροφική κίνηση, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το  $O$ , παίρνουμε:

$$\Sigma \tau = I a_{γων} \rightarrow FR = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{γων} \rightarrow mgR = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{γων} \rightarrow a_{γων} \cdot R = 2g$$

Με βάση αυτά οι απαντήσεις είναι:

- α) Λάθος, β) Σωστό, γ) Σωστό.

2) Την χρονική στιγμή που το άκρο  $A$  του παραπάνω νήματος έχει ανέβει κατά  $h$ , ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια:

- α)  $K=mgh$ , β)  $K=2mgh$ , γ)  $K=3mgh$ .

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

### Απάντηση:

Αν το άκρο Α του νήματος, σημείο εφαρμογής της δύναμης F, μετατοπισθεί κατά h, τότε το έργο της δύναμης, το οποίο μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται στον κύλινδρο, είναι ίσο:

$$W_F = F \cdot \Delta x = mg \cdot h$$

Συνεπώς τόση θα είναι και η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου, αφού το κέντρο Ο παραμένει ακίνητο, οπότε το βάρος δεν παράγει έργο (ισοδύναμα δεν μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου).

Σωστό το α).

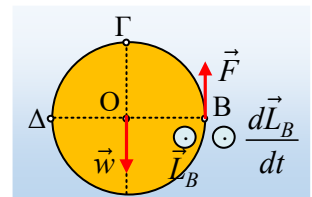
3) Αν το μέτρο της δύναμης είναι ίσο με  $F_1 = \frac{1}{2} mg$ , τότε την χρονική στιγμή t:

- Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς το σημείο Β;
- Πόση είναι η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς το Β;
- Να βρεθεί η ιδιοστροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον οριζόντιο άξονά του ο οποίος περνά από το Ο, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ιδιοστροφορμής.

### Απάντηση:

- α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το σημείο Β, είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα έξω, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\frac{dL_B}{dt} = \Sigma \tau = wR = mgR$$



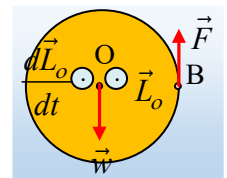
- β) Ο παραπάνω ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, παραμένει σταθερός, συνεπώς η στιγμιαία τιμή του συμπίπτει και με την μέση τιμή, οπότε:

$$\frac{dL_B}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = mgR \rightarrow \frac{L_B - 0}{t} = mgR \rightarrow L_B = mgRt$$

Διάνυσμα ίδιας κατεύθυνσης με το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής.

- γ) Η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του στο Ο (ιδιοστροφορμή) είναι επίσης κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$L_o = I_{cm} \cdot \omega = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu} t \xrightarrow{FR = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu}} L_o = FR \cdot t$$



Ενώ την ίδια κατεύθυνση έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το Ο, με μέτρο:

$$\frac{dL_o}{dt} = \Sigma \tau_o = F \cdot R = \frac{1}{2} mgR$$

### Σχόλιο:

Γιατί οι παραπάνω τιμές στροφορμής (και οι αντίστοιχοι ρυθμοί...) είναι διαφορετικές; Γιατί η στροφορμή

του κυλίνδρου ως προς το σημείο B, αποτελείται από δύο προσθετέους. Ο ένας είναι η ιδιοστροφορμή (ως προς το O) και ο άλλος η τροχιακή στροφορμή  $L_{\tau}=mv_{cm}R$ , οπότε:

$$L_B = I_{cm}\omega + mv_{cm}R = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega}t + m(a_{cm}t)R \rightarrow$$
$$L_B = \Sigma\tau_o t + \Sigma F \cdot tR = FRt + (mg - F)Rt = mgRt$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)