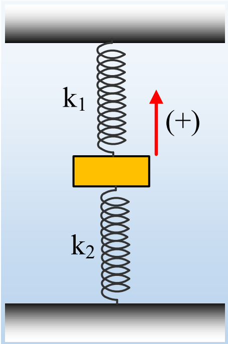
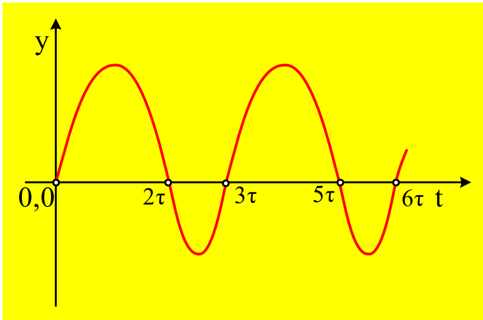
Ένα σώμα σε δύο ταλαντώσεις

Στο σχήμα βλέπετε ένα σώμα, το οποίο ισορροπεί μεταξύ δύο κατακόρυφων ιδανικών ελατηρίων, με σταθερές k_1 και k_2. Το σώμα είναι δεμένο στο πάνω ελατήριο, αλλά όχι στο κάτω.





Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα από την θέση ισορροπίας και το αφήνουμε να κινηθεί. Λαμβάνοντας κάποια στιγμή ως αρχή μέτρησης των χρόνων ($t_0=0$), σχεδιάσαμε την απομάκρυνση του σώματος από την αρχική θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο, παίρνοντας το διάγραμμα του παραπάνω σχήματος, όπου η προς τα πάνω κατεύθυνση είναι η θετική, ενώ το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα τις χρονικές στιγμές 0, 2τ, 3τ, 5τ, 6τ.

i) Μπορείτε να εξηγήσετε πόση είναι η αρχική παραμόρφωση του κάτω ελατηρίου, με βάση το διάγραμμα της απομάκρυνσης;

ii) Μεταξύ των δύο σταθερών των ελατηρίων ισχύει:

α) $k_2= ½\, k_1$, β) $k_2= k_1$, γ) $k_2= 2\, k_1$, δ) $k_2= 3\, k_1$.

iii) Αν A_1 το πλάτος ταλάντωσης, όταν το σώμα ταλαντώνεται στο άκρο μόνο του πάνω ελατηρίου και A_2 το αντίστοιχο πλάτος, όταν ταλαντώνεται δεχόμενο δυνάμεις και από τα δύο ελατήρια, ισχύει:

α) $A_1=3A_2$, β) $A_1=2A_2$, γ) $A_2=A_1$.

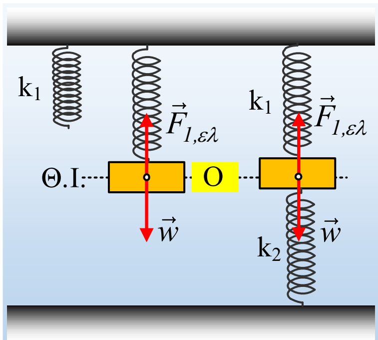
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται ότι ένα σώμα με την επίδραση δύο ελατηρίων, όπως στο σχήμα, εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$.

Απάντηση:

i) Με βάση το διάγραμμα y-t που πήραμε, προκύπτει ότι το σώμα πραγματοποιεί τμήματα από δύο ταλαντώσεις, μια όταν βρίσκεται πάνω από την **κοινή** θέση ισορροπίας του Ο (θέση μέγιστης ταχύτητας) με ημιπερίοδο 2τ και μια όταν κινείται κάτω από το Ο, με ημιπερίοδο τ.

Όταν όμως είναι σε επαφή **μόνο** με το ελατήριο k_1 η ΑΑΤ θα έχει περίοδο $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1}}$ μεγαλύτερη από την περίοδο που θα έχει η ΑΑΤ όταν



ταλαντώνεται σε επαφή με τα δύο ελατήρια $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$. Αλλά τότε στο διάστημα 0-2τ το σώμα θα βρίσκεται σε επαφή μόνο με το πάνω ελατήριο σταθεράς k_1 και στο διάστημα 2τ-3τ θα δέχεται δυνάμεις και με τα δύο ελατήρια.

Όμως η θέση Ο είναι η θέση ισορροπίας και για τις δύο αυτές ταλαντώσεις. Αλλά αν με μόνο το πάνω ελατήριο στη θέση Ο ισχύει $F_{1,ελ}=w$ (βλέπε σχήμα), τότε ίδιες δυνάμεις θα ασκούνται στο σώμα και στο δεξιό σχήμα, όπου το σώμα έρχεται σε επαφή και με το κάτω ελατήριο. Αλλά για να μην ασκεί δύναμη στο σώμα το κάτω ελατήριο, σημαίνει ότι στη θέση ισορροπίας Ο θα έχει το φυσικό μήκος του και $\Delta l_2=0$.

ii) Με βάση τα παραπάνω για τις δύο ταλαντώσεις θα ισχύει $T_1=2T_2$ ή

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}} \rightarrow \frac{m}{k_1} = 4\cdot\frac{m}{k_1+k_2} \rightarrow k_1+k_2 = 4k_1 \rightarrow$$
$$k_2 = 3k_1$$

Σωστό το δ).

iii) Αν το πλάτος της πρώτης ταλάντωσης είναι A_1, τότε από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι το σώμα φτάνει στη θέση ισορροπίας Ο, κινούμενο προς τα κάτω με ταχύτητα $υ_o$, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$\frac{1}{2}mυ_o^2 = \frac{1}{2}k_1A_1^2 \quad (1)$$

Αλλά με την ίδια ταχύτητα ξεκινά την δεύτερη ταλάντωση, με σταθερά $D=k_1+k_2$, οπότε το πλάτος A_2, θα υπολογίζεται ξανά από την ενέργεια της νέας ταλάντωσης:

$$\frac{1}{2}mυ_o^2 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)A_2^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}(k_1+k_2)A_2^2 = \frac{1}{2}k_1A_1^2 \rightarrow 4k_1A_2^2 = k_1A_1^2 \rightarrow$$
$$A_1 = 2A_2$$

Σωστό το β)

dmargaris@gmail.com