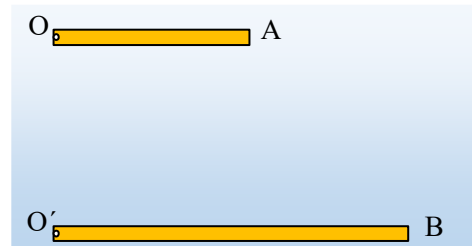


Η περιστροφή δύο ράβδων

Οι δύο ομογενείς ράβδοι του σχήματος, μπορούν να στρέφονται γύρω από σταθερούς οριζόντιους άξονες, οι οποίοι περνούν από τα άκρα τους Ο και Ο', διαγράφοντας κατακόρυφο επίπεδο. Φέρνουμε τις ράβδους σε οριζόντια θέση και τις αφήνουμε να κινηθούν.



- i) Μεγαλύτερη αρχική επιτάχυνση αποκτά:
- Το άκρο Α της μικρότερης ράβδου.
 - Το άκρο Β της ράβδου με το μεγαλύτερο μήκος.
 - Τα άκρα Α και Β αποκτούν την ίδια αρχική επιτάχυνση.
- ii) Στην κατακόρυφη θέση θα φτάσει πρώτη:
- Η μικρή ράβδος.
 - Η μακρύτερη ράβδος.
 - Η ράβδος με την μεγαλύτερη μάζα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος διέρχεται από το μέσον της $I_{cm} = m\ell^2/12$.

Απάντηση:

- i) Έστω μια ράβδος μάζας m και μήκους l η οποία αφήνεται να περιστραφεί από την οριζόντια θέση, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο, όπως στο σχήμα. Από το θεώρημα Steiner παίρνουμε:

$$I_o = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} m\ell^2$$

Ενώ ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή της ράβδου, μας δίνει:

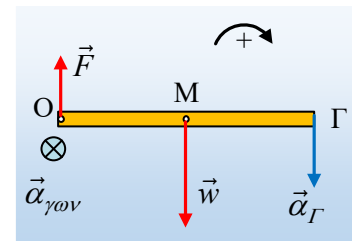
$$\Sigma \tau_o = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} m\ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell} \quad (1)$$

Με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε το άκρο Γ της ράβδου θα έχει επιτάχυνση κατακόρυφη με μέτρο:

$$a_\Gamma = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \frac{3g}{2\ell} \cdot \ell = \frac{3g}{2}$$

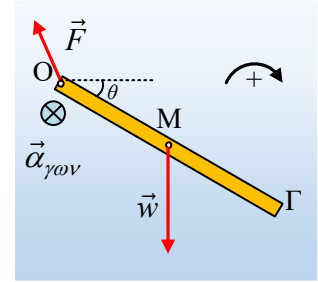
Βλέπουμε δηλαδή ότι η επιτάχυνση του άκρου Γ της ράβδου, δεν εξαρτάται, ούτε από το μήκος της ράβδου, ούτε από την μάζα της. Αλλά τότε μιλώντας για τα άκρα Α και Β των δύο ράβδων, θα αποκτήσουν την ίδια αρχική επιτάχυνση. Σωστό το γ).

- ii) Από την εξίσωση (1) παραπάνω, προκύπτει ότι η αρχική γωνιακή ταχύτητα μιας ράβδου είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους της. Συνεπώς η πρώτη ράβδος, με το μικρότερο μήκος, θα αποκτήσει μεγαλύτερη



γωνιακή επιτάχυνση και θα φτάσει πρώτη στην κατακόρυφη θέση, χωρίς αυτό να καθορίζεται από την μάζα της.

Βέβαια θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι αυτό συμβαίνει για μια μόνο στιγμή και τα πράγματα θα αλλάξουν στην συνέχεια. Είναι έτσι; Δεν έχουμε παρά να ελέγξουμε τι θα συμβεί για μια τυχαία θέση που η ράβδος θα σχηματίζει μια τυχαία γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, καθώς στρέφεται.



Ξανά από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή της ράβδου, θα έχουμε:

$$\Sigma \tau_o = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mg \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{3} m\ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell} \sigma\upsilon\nu\theta \quad (2)$$

Βλέπουμε ότι για μια τυχαία θέση (που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση) η γωνιακή επιτάχυνση συνεχίζει να είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους της ράβδου, πράγμα που σημαίνει ότι σε όλη την διαδρομή, μέχρι να γίνει κατακόρυφη, η πρώτη ράβδος, η κοντύτερη, θα στρέφεται με μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση, άρα θα χρειαστεί λιγότερο χρόνο για να στραφεί κατά 90° .

Σωστό το α).

dmargaris@gmail.com