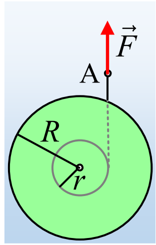
Ένα πρόβλημα ανάποδα



Έχουμε μια ομογενή τροχαλία μάζας M = 5kg και ακτίνας R=0,4 m. Η τροχαλία σε απόσταση r από το κέντρο της Ο έχει ένα λεπτό κυκλικό αυλάκι στο οποίο έχουμε τυλίξει πολλές φορές αβαρές και μη εκτατό νήμα. Σε μια στιγμή t=0, ασκούμε στο άκρο Α του νήματος μια κατακόρυφη δύναμη F=40N, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε ελεύθερη την τροχαλία να κινηθεί, μέχρι τη στιγμή t_1=1s. Αν το άκρο Α του νήματος αποκτά επιτάχυνση α= 2m/s^2 με φορά προς τα πάνω, ενώ g=10m/s^2:

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρεται στην τροχαλία μέσω της δύναμης, από 0-t_1, καθώς και η ισχύς της δύναμης την στιγμή t_1.

Μονάδες: 3+3=6

ii) Ποια η κινητική ενέργεια της τροχαλίας την στιγμή t_1;

Μονάδες: 8

Αν η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της δίνεται από την εξίσωση I= ½ mR^2:

iii) Να βρεθεί η ακτίνα r που έχει το αυλάκι, στο οποίο έχουμε τυλίξει το νήμα.

Μονάδες: 5

iv) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής και η στροφορμή της τροχαλίας ως προς τον οριζόντιο άξονα περιστροφής, ο οποίος διέρχεται από τα μέσα των δύο βάσεων, την χρονική στιγμή t_1.

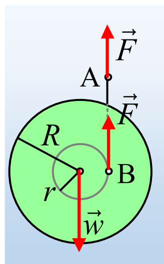
Μονάδες: 3+3=6

Τα δύο πρώτα ερωτήματα πρέπει να απαντηθούν χωρίς να χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω (ροπή αδράνειας…) δεδομένα ή ευρήματα.

Απάντηση:

i) Το άκρο Α του νήματος μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά y_1 αποκτώντας ταχύτητα υ_1 όπου:

$$y_1 = \frac{1}{2}a_A t^2 = \frac{1}{2}2\cdot 1^2 m = 1m \quad \text{ενώ} \quad \upsilon_1 = \alpha_A t = 2\cdot 1m/s = 2m/s$$



Όμως μέσω του νήματος ασκείται στο σημείο Β της τροχαλίας, δύναμη επίσης μέτρου F, όπου το σημείο εφαρμογής της Β, μετατοπίζεται επίσης κατά y_1, έχοντας και ταχύτητα ίση με αυτή του άκρου Α. Αλλά τότε:

$$W_F = F\cdot y_1 = 40\cdot 1J = 40J \text{ και}$$

$$P_F = F\cdot \upsilon_1 = 40\cdot 2W = 80W$$

ii) Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας της τροχαλίας, δίνει (w>F):

$$\Sigma F = ma_{cm} \to a_{cm} = \frac{mg-F}{m} = \frac{50-40}{5} m/s^2 = 2m/s^2.$$

Με κατεύθυνση προς τα κάτω. Αλλά τότε το βάρος παράγει έργο:

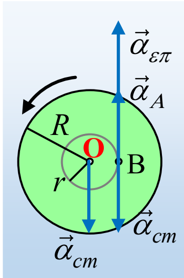
$$W_w = mgy_2 = mg \cdot \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1^2 J = 50J$$

Οπότε η κινητική ενέργεια της τροχαλίας θα είναι ίση με το άθροισμα των δύο έργων:

$$K_\tau = W_F + W_w = 40J + 50J = 90J$$

(Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ΘΜΚΕ…)

iii) Εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της τροχαλίας γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο της, παίρνοντας:



$$\Sigma\tau = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Fr = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$Fr^2 = \frac{1}{2} mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot r \quad (1)$$

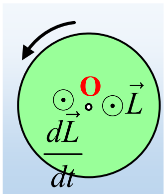
Όμως η επιτάχυνση του σημείου Β, στην κατακόρυφη διεύθυνση (αφήνοντας στην άκρη την κεντρομόλο), είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας και της επιτρόχιας επιτάχυνσης $\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r$, οπότε με βάση το σχήμα θα έχουμε:

$$\alpha_A = \alpha_{\varepsilon\pi} - \alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{cm} + \alpha_{\varepsilon\pi} = 2m/s^2 + 2m/s^2 = 4m/s^2.$$

Και λύνοντας την (1) ως προς r, παίρνουμε:

$$r = R\sqrt{\frac{m \cdot a_{\varepsilon\pi}}{2F}} = 0,4\sqrt{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 40}} m = 0,4\sqrt{\frac{1}{4}} m = 0,2m$$

iv) Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_O = Fr = 40 \cdot 0,2 kgm^2/s^2 = 8kgm^2/s^2.$$

Όμως ο παραπάνω ρυθμός παραμένει σταθερός οπότε:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_1 - 0}{t_1 - 0} \rightarrow$$

$$L_1 = \frac{dL}{dt} \cdot t_1 = 8 \cdot 1 kgm^2/s = 8kgm^2/s$$

Και τα δύο διανύσματα, πάνω στον άξονα στο κέντρο Ο, όπως στο σχήμα.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε, με βάση την γωνιακή επιτάχυνση να υπολογίσουμε την γωνιακή ταχύτητα και από εκεί την στροφορμή ή η ω να υπολογιστεί μέσω της κινητικής ενέργειας, που υπολογίστηκε στο ii) ερώτημα.

dmargaris@gmail.com