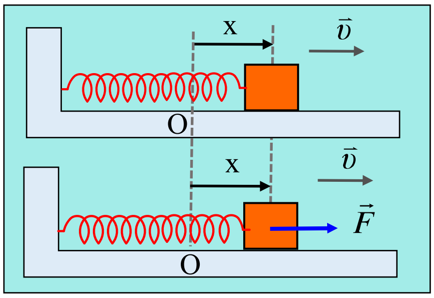
Δύο διαφορετικές ταλαντώσεις



Ένα σώμα Σ είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου, εκτελώντας ΑΑΤ με εξίσωση απομάκρυνσης x=0,2·ημ(6t) (μονάδες στο S.I.), σε λείο οριζόντιο επίπεδο, γύρω από τη θέση Ο, θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Το ίδιο σύστημα τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, με την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης F, ενώ ταυτόχρονα δέχεται από το περιβάλλον του και δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{απ}$=-bυ. Μετά την αποκατάσταση σταθερού πλάτους ταλάντωσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας Ο, λαμβάνοντας κάποια στιγμή ως αρχή μέτρησης του χρόνου, παίρνουμε την εξίσωση x=0,2·ημ(5t) (S.I.), για την απομάκρυνση του σώματος.

Για μια θέση με απομάκρυνση x, όπου το σώμα κινείται προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα:

i) Αν υ_1 η ταχύτητα στην περίπτωση της ΑΑΤ και υ_2 η ταχύτητα στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, ισχύει:

α) $\upsilon_1 < \upsilon_2$, β) $\upsilon_1 = \upsilon_2$, γ) $\upsilon_1 > \upsilon_2$.

ii) Αν α_1 και α_2 τα μέτρα των αντίστοιχων επιταχύνσεων, τότε:

α) $\alpha_1 < \alpha_2$, β) $\alpha_1 = \alpha_2$, γ) $\alpha_1 > \alpha_2$.

iii) Σε ποια περίπτωση η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη; Στην ΑΑΤ ή στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, για την ίδια απομάκρυνση x;

Αν $\dfrac{dU_1}{dt} = \lambda$ και $\dfrac{dU_2}{dt} = \mu$ οι αντίστοιχοι ρυθμοί μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, ισχύει:

α) λ < μ, β) λ = μ, γ) λ > μ.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Αν η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι x=Αημ(ωt), τότε η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι της μορφής υ=ωΑσυν(ωt). Λύνοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις ως προς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνουμε:

$$\eta\mu(\omega t) = \frac{x}{A} \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \frac{\upsilon}{\omega A} \rightarrow$$

$$\eta\mu^2(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = 1 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1 \rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι μεγαλύτερη κατά μέτρο ταχύτητα, στην θέση με απομάκρυνση x, θα έχει το σώμα στην περίπτωση που έχει μεγαλύτερη γωνιακή συχνότητα. Εδώ $\omega_0 > \omega_\delta$, συνεπώς στην πρώτη περίπτωση που το σώμα εκτελεί ΑΑΤ, θα έχει και μεγαλύτερη ταχύτητα. Σωστό το γ).

ii) Για τις δύο επιταχύνσεις έχουμε:

$$\alpha_1 = -\omega_0^2 \cdot x \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha_2 = -\omega_\delta^2 \cdot x$$

Οπότε και πάλι $|\alpha_1| > |\alpha_2|$, σωστό το γ).

iii) Η δυναμική ενέργεια συνδέεται με το έργο της δύναμης επαναφοράς (εδώ η δύναμη του ελατηρίου) με την εξίσωση $W_{F_{\varepsilon\pi}} = -\Delta U = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda}$. Πράγμα που σημαίνει ότι στη θέση με απομάκρυνση x και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε την ίδια τιμή δυναμικής ενέργειας $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Αλλά για το ρυθμό μεταβολής της ισχύει:

α) Στην ελεύθερη αμείωτη ταλάντωση (ΑΑΤ):

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\lambda}}}{dt} = -\frac{|F_{\varepsilon\lambda}|dx \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o}{dt} = kx \cdot \upsilon_1$$

β) Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση:

$$\frac{dU_2}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\lambda}}}{dt} = -\frac{|F_{\varepsilon\lambda}|dx \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o}{dt} = kx \cdot \upsilon_2$$

Οπότε αφού $\upsilon_1 > \upsilon_2$ (i) ερώτημα, συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{dU_1}{dt} > \frac{dU_1}{dt} \quad ή \ \lambda > \mu$$

Σωστό το γ).

Σχόλιο:

Και στο ερώτημα, γιατί η σύγκριση των ταχυτήτων παραπάνω έγινε με την βοήθεια της εξίσωσης:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

και όχι με βάση τη διατήρηση ενέργειας στην ταλάντωση, η απάντηση είναι ότι, ενώ στην περίπτωση της ΑΑΤ η ενέργεια (K+U) παραμένει σταθερή, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

dmargaris@gmail.com