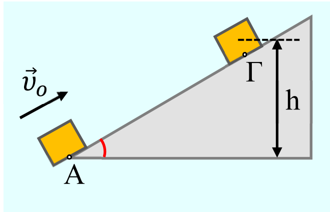
Η άνοδος και η κάθοδος σε ένα κεκλιμένο επίπεδο



Ένα σώμα Σ μάζας 0,2kg και αμελητέων διαστάσεων, εκτοξεύεται από την βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου, θέση Α, με αρχική ταχύτητα υ_0=3m/s, οπότε ανέρχεται κατά μήκος του επιπέδου και σταματά στην θέση Γ, η οποία απέχει κατακόρυφη απόσταση h=0,4m από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Α.

i) Να υπολογιστεί η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος Σ.

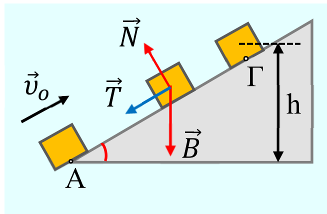
ii) Να υπολογιστεί το έργο του βάρους κατά την μετακίνηση του σώματος Σ από το Α στο Γ.

iii) Να εξετάσετε αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι ή όχι λείο. Στην περίπτωση που ασκείται δύναμη τριβής στο σώμα, να υπολογιστεί το έργο της για την παραπάνω κίνηση.

iv) Με ποια αρχική ταχύτητα πρέπει να εκτοξεύσουμε το σώμα Σ από την θέση Γ, με φορά προς τα κάτω, για να επιστρέψει στην θέση Α με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2=\upsilon_0$;

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, σε μια τυχαία θέση κατά την προς τα πάνω, κατά μήκος του επιπέδου, κίνησή του. Το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη αντίδραση του επιπέδου $\vec{N}$ και πιθανόν μια τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, αν το επίπεδο δεν είναι λείο.

i) Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση Α, είναι ίση:

$$K_A=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=\frac{1}{2}0,2\cdot 3^2J=0,9J$$

ii) Το βάρος είναι μια συντηρητική δύναμη το έργο της οποίας δεν εξαρτάται από την διαδρομή, αλλά συνδέεται με την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας και είναι ίση:

$$W_B=-\Delta U=\pm\, mgh \quad (1)$$

Όπου h η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων, ενώ το έργο είναι θετικό αν το σώμα κινείται προς τη Γη (κινείται προς τα κάτω) και αρνητικό αν κινείται προς τα πάνω. Συνεπώς εδώ θα έχουμε:

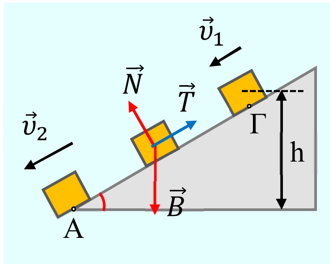
$$W_{B,A\to\Gamma}=-\,mgh=-0,2\cdot 10\cdot 0,4J=-0,8J$$

iii) Η αρνητική τιμή του παραπάνω έργου του βάρους, σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια αυξήθηκε κατά 0,8J, σύμφωνα με την σχέση (1) παραπάνω. Αν την ενέργεια αυτή την συγκρίνουμε με την αρχική κινητική ενέργεια των 0,9J, διαπιστώνουμε ότι η μηχανική ενέργεια μειώθηκε κατά 0,9J-0,8J=0,1J, πράγμα που σημαίνει ότι στο σώμα ασκήθηκε μια επιπλέον μη συντηρητική δύναμη, που στην περίπτωσή μας δεν μπορεί παρά να είναι η τριβή ολίσθησης, μιας και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου δεν παράγει έργο, αφού είναι κάθετη στην μετατόπιση. Με βάση τα παραπάνω το έργο της τριβής θα είναι ίσο με την ενέργεια που «μας λείπει», δηλαδή ίσο με -0,1J. Μπορούμε να το δούμε και αλλιώς!

Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος για την μετακίνησή του από το Α στο Γ:

$$K_\Gamma - K_A = W_B + W_N + W_T \xrightarrow{K_\Gamma = W_N = 0} 0 - K_A = W_B + 0 + W_T \rightarrow$$
$$W_T = -K_A - W_B = -0,9J - (-0,8J) = -0,1J$$

iv) Έστω ότι εκτοξεύουμε με ταχύτητα μέτρου υ_1 το σώμα από το σημείο Γ, με κατεύθυνση προς την θέση Α, στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει ξανά τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπου πια η τριβή ολίσθησης έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας, προς τα πάνω. Προσοχή όμως: Άλλαξε η κατεύθυνσή της αλλά όχι το μέτρο της, αφού Τ=μΝ και δεν άλλαξε ούτε η φύση των επιφανειών, ούτε η κάθετη αντίδραση του επιπέδου (αλήθεια μπορείτε να βρείτε από τι εξαρτάται η δύναμη $\vec{N}$;).



Εφαρμόζουμε ξανά το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων Γ και Α, λαμβάνοντας υπόψη μας ότι το έργο της τριβής θα είναι:

$$W_{T,\Gamma\to A} = -T\cdot s = W_{T,A\to\Gamma} = -0,1J$$

Όπου s η απόσταση (ΑΓ), ενώ το έργο του βάρους θα είναι τώρα ίσο με:

$$W_{B,\Gamma\to A} = +\,mgh = +0,8J \ \ .$$

Έτσι παίρνουμε:

$$K_A - K_\Gamma = W_B + W_N + W_T \xrightarrow{W_N = 0} \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = W_B + 0 + W_T \rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = W_B + W_T \rightarrow$$
$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{2(W_B + W_T)}{m}} = \sqrt{3^2 - \frac{2(0,8-0,1)}{0,2}}m/s = \sqrt{2}m/s$$

dmargaris@gmail.com