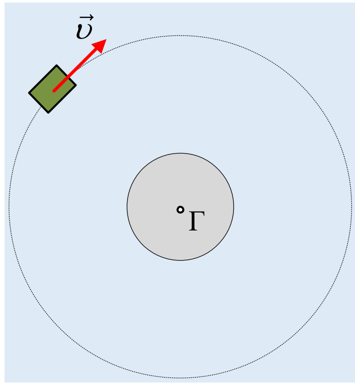
Ο δορυφόρος, η ταχύτητα διαφυγής και οι τριβές

Ένα τεχνητός δορυφόρος της Γης εκτελεί κυκλική κίνηση με κέντρο το κέντρο της Γης, σε ύψος $h=3R_Γ$ από την επιφάνειά της.



i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του δορυφόρου.

ii) Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια ενός σώματος Σ μάζας m=2kg μέσα στο δορυφόρο, με δεδομένο ότι η δυναμική του ενέργεια είναι μηδέν στο άπειρο.

iii) Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια η οποία πρέπει να δοθεί στο παραπάνω σώμα Σ, προκειμένου να εγκαταλείψει τον δορυφόρο και να φτάσει σε άπειρη απόσταση από τη Γη;

iv) Το σώμα Σ εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $υ_ο$=2m/s, πάνω σε τραπέζι που βρίσκεται μέσα στον δορυφόρο και με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ=0,5. Σε πόσο χρόνο θα διατρέξει απόσταση d=1m;

Η Γη θεωρείται το μοναδικό σώμα στο διάστημα, η επίδραση της ατμόσφαιρας αμελητέα ενώ $R_Γ$=6.400km και $g_ο$=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Το βάρος του δορυφόρου, παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου, οπότε:

$$F = F_k \to G\frac{M_Γ m}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \to \upsilon = \sqrt{\frac{GM_Γ}{r}} \quad (1)$$

Όπου $M_Γ$ η μάζα της Γης και $r=R_Γ+h=4R_Γ$ η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

Αλλά για την επιτάχυνση στην επιφάνεια της Γης έχουμε:

$$g_o = G\frac{M_Γ}{R_Γ^2} \to GM_Γ = g_o R_Γ^2 \quad (2)$$

Και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM_Γ}{r}} = \sqrt{\frac{g_o R_Γ^2}{4R_Γ}} = \sqrt{\frac{g_o R_Γ}{4}} \to$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{10 \cdot 6.400 \cdot 10^3}{4}} m/s = 4.000 m/s$$

ii) Η μηχανική ενέργεια του σώματος Σ, ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας, είναι ίση:

$$E_M = K + U = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \left(-G\frac{M_Γ m}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M_Γ}{r}}\right)^2 - G\frac{M_Γ m}{r} \to$$

$$E_M = -G\frac{M_\Gamma m}{2r} \xrightarrow{(2)} E_M = -\frac{mg_o R_\Gamma^2}{2\cdot 4R_\Gamma} = -\frac{1}{8}mg_o R_\Gamma \rightarrow$$

$$E_M = -\frac{1}{8}2\cdot 10\cdot 6.400\cdot 10^3 J = -16\cdot 10^6 J$$

iii) Έστω ότι η απαιτούμενη ενέργεια δίνεται με την επίδραση κατάλληλης δύναμης, η οποία παράγει έργο W, προσφέροντας έτσι την απαραίτητη ενέργεια. Τότε από την διατήρηση της ενέργειας για το σώμα Σ θα πάρουμε:

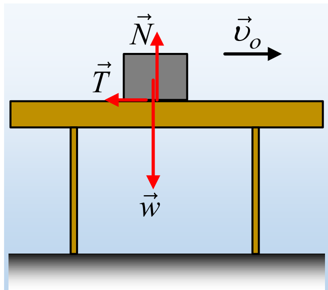
$$E_{M(\alpha\rho\chi)} + W_F = E_{M(\tau\varepsilon\lambda)} \rightarrow$$
$$E_M + W_F = K_\infty + U_\infty$$

Αλλά η ελάχιστη ενέργεια είναι αυτή η οποία θα επιτρέψει στο σώμα να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα, ενώ τότε θα ισχύει επίσης ότι $U_\infty=0$, οπότε $E_{M(\tau\varepsilon\lambda)}=0$ και θα έχουμε:

$$W_{F_{min}} = -E_M = +16\cdot 10^6 J$$

- Μπορείτε να φτάσετε στο ίδιο αποτέλεσμα με χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε.;

iv) Στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, μόλις εκτοξευθεί πάνω στο τραπέζι, που βρίσκεται μέσα στον δορυφόρο.



Στην κατεύθυνση του βάρους (ας την ορίσουμε ως κατακόρυφη…) ισχύει:

$$\Sigma F = F_k \rightarrow G\frac{M_\Gamma m}{r^2} - N = m\frac{\upsilon^2}{r} \rightarrow N = 0$$

(με λόγια το βάρος παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε το Σ δεν δέχεται δύναμη στήριξης (N) από το τραπέζι).

Αλλά τότε και η τριβή είναι μηδενική, με αποτέλεσμα το σώμα να κινείται με σταθερή ταχύτητα, οπότε:

$$\Delta x = \upsilon_o \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{\upsilon_o} = \frac{d}{\upsilon_o} = \frac{1}{2}s = 0,5s$$

dmargaris@gmail.com