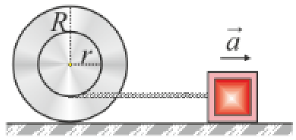
# Επαναληπτική Άσκηση Στερεό




Τροχός ακτίνας $R = 0{,}4\ \text{m}$ και μάζας $m = 1\ \text{kg}$ φέρει εγκοπή ακτίνας $r = R/2$ στην οποία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται στο μέσον κύβου πλευράς $R$ και μάζας $M = 6\ \text{kg}$, όπως στο σχήμα. Αρχικά ($t_0 = 0$) τα σώματα είναι ακίνητα και το οριζόντιο τμήμα του νήματος έχει μήκος $l = 3{,}5R$. Ασκούμε στον κύβο οριζόντια δύναμη $F = 54N$ έτσι ώστε να ολισθαίνει με σταθερή επιτάχυνση $a = 2\ \text{m/s}^2$, ενώ ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Βρείτε:

**α.** Τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

**β.** Τη χρονική στιγμή που τα δύο σώματα θα έρθουν σε επαφή.

**γ.** Την ταχύτητα του σημείου του τροχού που θα έρθει σε επαφή με τον κύβο λίγο πριν την κρούση.

**δ.** Την επιτάχυνση του υψηλότερου σημείου του τροχού όταν η κινητική ενέργεια του κύβου είναι 1,8 J.

**ε.** Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κύβου λίγο πριν την κρούση.

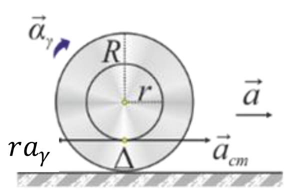
ζ. Την Συνισταμένη ροπή που δέχεται ο τροχός ως προς το σημείο επαφής του τροχού με το δάπεδο αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κύβου και δαπέδου είναι $\mu = 0{,}5$

**Απ.[α.** $\alpha_\gamma = 10\ \text{rad/s}^2$, **β.** $t_1 = 1\ \text{s}$, **γ.** $\upsilon = 4\sqrt{2}\ \text{m/s}$, **δ.** $a_A = 10\ \text{m/s}^2$, **ε.** $dK/dt = 24\ \text{J/s}$**]**

**Σκοπός της άσκησης είναι να θυμίσουμε ότι:**

- *Η κύλιση μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθετη κίνηση η οποία προκύπτει από την επαλληλία*
  *Μιας μεταφορικής κίνησης = κίνηση του CM*
  *Και μιας περιστροφικής κίνησης γύρω από άξονα που διέρχεται από το CM*
- *Τις σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης* $(\Delta x_{cm}, \upsilon_{cm}, \alpha_{cm})$ *με τα αντίστοιχα μεγέθη* $(\Delta\theta, \omega, \alpha_\gamma)$ *της περιστροφικής κίνησης*
  $$\Delta x_{cm} = R \cdot \Delta\theta \quad, \upsilon_{cm} = R\omega \quad, \alpha_{cm} = R\alpha_\gamma$$
- *Τις εξισώσεις κίνησης*
- *Όλα τα σημεία του τεντωμένου τμήματος ενός νήματος έχουν ίδια ταχύτητα*
- *Το τμήμα του νήματος που είναι τεντωμένο συμπεριφέρεται ως μέρος του στερεού*
- *Το τύλιγμα-ξετύλιγμα του νήματος οφείλεται στην περιστροφική κίνηση*
- *Το μήκος του νήματος που τυλίγεται ή ξετυλίγεται οφείλεται στην περιστροφική κίνηση*
  *και είναι* $l_{\tau\upsilon\lambda\acute{\iota}\gamma\varepsilon\tau\alpha\iota}$ ή $l_{\xi\varepsilon\tau\upsilon\lambda\acute{\iota}\gamma\varepsilon\tau\alpha\iota} = r\theta$
  *όπου r η ακτίνα στην οποία είναι τυλιγμένο το νήμα*
- *Όταν λέμε «ρυθμός μεταβολής» εννοούμε τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής*
- *Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:*
  $$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$$

## ΛΥΣΗ




**α.** Ο τροχός κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση οπότε θα είναι $a_{cm} = \alpha_\gamma R$.

Για το σημείο Δ ισχύει:

$$a_\Delta = a_{cm} - \alpha_\gamma r = a_{cm} - \frac{R}{2}\alpha_\gamma$$

Η επιτάχυνση $\alpha$ του κύβου είναι ίση με την επιτάχυνση του σημείου Δ

$$a = a_{\Delta} \Rightarrow \alpha = a_{cm} - \frac{R}{2}\alpha_{\gamma} \Rightarrow \alpha = a_{cm} - \frac{a_{cm}}{2} = \frac{a_{cm}}{2} \Rightarrow a_{cm} = 2a = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\alpha_{\gamma} = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = 10\ \mathrm{rad/s^2}$$

Παρατηρούμε ότι το Κ.Μ. του τροχού έχει διπλάσια επιτάχυνση από την επιτάχυνση του κύβου . Έτσι κάθε στιγμή η μετατόπιση του Κ.Μ. του τροχού θα είναι διπλάσια από την μετατόπιση του κύβου.

**β.** Όταν έρθουν σε επαφή, το κέντρο μάζας του τροχού έχει διανύσει διάστημα $x_1$ και ο κύβος έχει διανύσει διάστημα $x_2$. Ισχύει:

$$x_1 = 2x_2$$

$$x_1 + R = x_2 + l \Rightarrow 2x_2 + R = x_2 + l \Rightarrow x_2 = l - R = 2{,}5R$$

Είναι:

$$x_2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_2}{\alpha}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\cdot 2{,}5R}{\alpha}} \Rightarrow t = 1s$$

**γ.** Η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή $t = 1s$ θα είναι:

$$\upsilon_{cm} = a_{cm}\cdot t = 4\cdot 1 = 4m/s$$

Η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού θα είναι

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = 4m/s$$

οπότε τη χρονική στιγμή $t = 1$ s η ταχύτητα του σημείου επαφής έχει μέτρο:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{2}\upsilon_{cm} = \sqrt{2}a_{cm}t_1 \Rightarrow \upsilon = 4\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$$

**δ.** Το ψηλότερο σημείο έχει δύο συνιστώσες επιτάχυνσης που είναι κάθετες μεταξύ τους

- Την εφαπτομενική επιτάχυνση $a_{\varepsilon\varphi} = 2a_{cm} = 8\ \mathrm{m/s^2}$
- Την κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_{\kappa} = \omega^2 R$

Από την κινητική ενέργεια του κύβου μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του κύβου και στη συνέχεια να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα του τροχού από την οποία θα υπολογίσουμε την $\alpha_{\kappa}$

$$K = \frac{1}{2}M\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{M}}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{3{,}6}{6}} = \sqrt{0{,}6}m/s$$

$$\upsilon_{cm} = 2\upsilon \Rightarrow R\omega = 2\upsilon \Rightarrow \omega = \frac{2\upsilon}{R} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\upsilon^2}{R^2}$$

$$\alpha_{\kappa} = \omega^2 R = \frac{4\upsilon^2}{R^2}R = \frac{4\upsilon^2}{R} = \frac{4\cdot 0{,}6}{0{,}4} = 6\ \mathrm{m/s^2}$$

Η επιτάχυνση του υψηλότερου σημείου θα έχει μέτρο:

$$a_A = \sqrt{a_{\varepsilon}^2 + a_{\kappa}^2} \Rightarrow a_A = 10\ \mathrm{m/s^2}$$

**ε.** Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κύβου λίγο πριν την κρούση είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon = Ma\upsilon = Ma^2 t_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 24 \text{ J/s}$$

ζ. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τον τροχό

Για τον κύβο.

$$\Sigma F = M\alpha \Rightarrow F - T - T_{o\lambda} = Ma \quad \Rightarrow T = F - Ma - \mu Mg = 54 - 30 - 6 \cdot 2 = 12N$$

Η.

$$\Sigma\tau = \tau_T + \tau_W + \tau_N + \tau_{Ts} = \tau_T = T \cdot \frac{R}{2} = 12 \cdot 0{,}2 = 2{,}4Nm$$