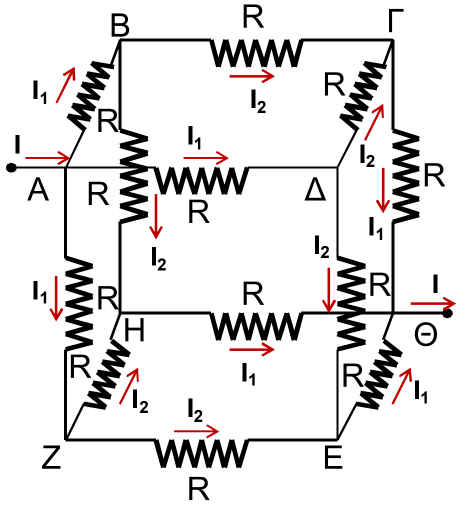
1. Κύκλωμα αντιστατών σε εξάεδρο

Δίνεται η διπλανή διάταξη 12 ομοίων αντιστατών αντίστασης R που βρίσκονται στις ακμές ενός εξαέδρου (π.χ. κύβου).

Α. **Να υπολογιστεί η συνολική αντίσταση $R_{A\Theta}$ του διπόλου με άκρα ΑΘ** (Πανελλήνιος Διαγωνισμός Φυσικής 2003 Β' Λυκείου)

Από τη συμμετρία της συνδεσμολογίας προκύπτει ότι οι κλάδοι ΑΒ, ΑΔ, ΑΖ πρέπει να διαρρέονται από ρεύμα ίσης έντασης I_1. Το ίδιο ισχύει για τους κλάδους ΗΘ, ΕΘ, ΓΘ. Συνεπώς από τον 1^o κανόνα Kirchhoff για τους κόμβους Α και Θ ισχύει:

$$I=3I_1$$



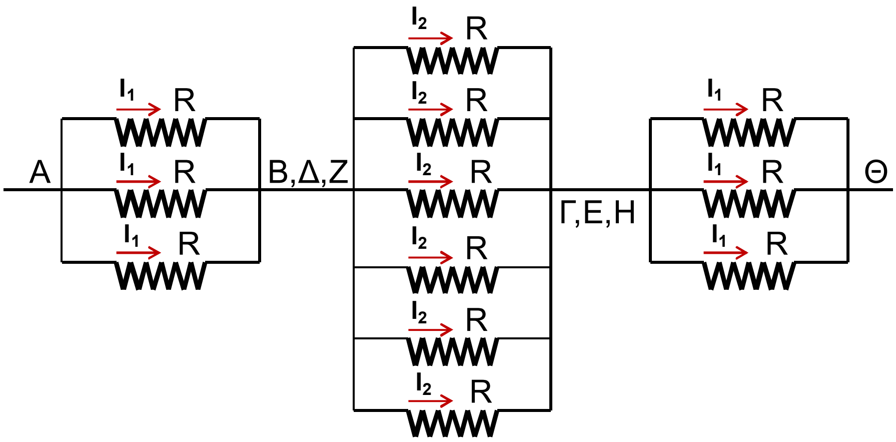
Επίσης οι κλάδοι ΒΓ και ΒΗ, ΖΕ και ΖΗ, ΔΓ και ΔΕ διαρρέονται από ρεύμα ίσης έντασης I_2. Από τον 1^o κανόνα Kirchhoff για τους κόμβους Β, Δ, Ζ, Ε, Γ, Η ισχύει:

$$I_1=2I_2$$

Από τον 2^o κανόνα Kirchhoff για την αγώγιμη διαδρομή ΑΒΓΘ ισχύει:

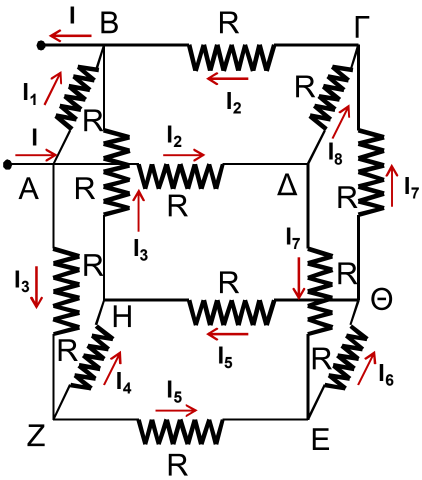
$$V_{A\Theta}=V_{AB}+V_{B\Gamma}+V_{\Gamma\Theta} \Leftrightarrow IR_{A\Theta}=I_1R+I_2R+I_1R \Leftrightarrow IR_{B\Theta}=\frac{I}{3}R+\frac{I}{6}R+\frac{I}{3}R \Leftrightarrow \boxed{R_{B\Theta}=\frac{5R}{6}}$$

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος και με δεδομένο ότι οι κλάδοι ΑΒ, ΑΔ, ΑΖ διαρρέονται από ρεύματα ίσης έντασης, τα σημεία Β, Δ και Ζ είναι ισοδυναμικά ($V_{AB}=V_{A\Delta}=V_{AZ}=I_1R$). Επομένως οι αντίστοιχοι αντιστάτες μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Ομοίως οι κλάδοι ΘΓ, ΘΕ, ΘΗ διαρρέονται ρεύματα ίσης έντασης, τα σημεία Γ, Ε και Η είναι ισοδυναμικά ($V_{\Theta\Gamma}=V_{\Theta E}=V_{\Theta H}=I_1R$) και οι αντίστοιχοι αντιστάτες μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Τέλος οι υπόλοιποι 6 αντιστάτες με άκρα τα παραπάνω σημεία είναι πρακτικά παράλληλα συνδεδεμένοι μεταξύ τους (έχουν πλέον ισοδυναμικά άκρα) και σε σειρά με τους προηγούμενους. Η παραπάνω συνδεσμολογία απλοποιείται στο παρακάτω σχήμα.



$$R_{A\Theta}=\frac{R}{3}+\frac{R}{6}+\frac{R}{3} \Leftrightarrow R_{A\Theta}=\frac{5R}{6}$$

Β. **Να υπολογιστεί η συνολική αντίσταση R_{AB} του διπόλου με άκρα ΑΒ**.



Από τη συμμετρία της συνδεσμολογίας προκύπτει ότι οι κλάδοι ΑΔ, και ΒΓ διαρρέονται από ρεύμα ίσης έντασης I_2, οι κλάδοι ΑΖ και ΒΗ διαρρέονται από ρεύμα ίσης έντασης I_3, οι κλάδοι ΖΕ και ΗΘ διαρρέονται από ρεύμα ίσης έντασης I_5 και οι κλάδοι ΔΕ και ΘΓ διαρρέονται από ρεύμα ίσης έντασης I_7. Από τον 1^o κανόνα Kirchhoff για τους κόμβους:

Α, Β ισχύει: $I=I_1+I_2+I_3$ (1)

Ζ, Η ισχύει: $I_3=I_4+I_5$ (2)

Ε, Θ ισχύει: $I_6=I_5+I_7$ (3)

Γ, Δ ισχύει: $I_2=I_8+I_7$ (4)

Από τον 2^o κανόνα Kirchhoff για τους βρόγχους:

ΖΕΘΗΖ ισχύει: $I_5R+I_6R+I_5R-I_4R=0 \Leftrightarrow 2I_5+I_6=I_4$ (5)

ΑΒΓΔΑ ισχύει: $I_2R+I_8R+I_2R-I_1R=0 \Leftrightarrow 2I_2+I_8=I_1$ (6)

ΑΒΗΖΑ ισχύει: $I_3R+I_4R+I_3R-I_1R=0 \Leftrightarrow 2I_3+I_4=I_1$ (7)

ΔΓΘΕΔ ισχύει: $I_7R+I_6R+I_7R-I_8R=0 \Leftrightarrow 2I_7+I_6=I_8$ (8)

$$(8)\xrightarrow{(4)} I_6 = 3I_8 - 2I_2 \xrightarrow{(6)} I_6 = 3I_1 - 6I_2 - 2I_2 \Leftrightarrow I_6 = 3I_1 - 8I_2 \qquad (9)$$

$$(4)\xrightarrow{(6)} I_7 = I_2 - I_1 + 2I_2 \Leftrightarrow I_7 = 3I_2 - I_1 \qquad (10)$$

$$(5)\xrightarrow{(6)} I_5 = I_3 - I_4 \xrightarrow{(7)} I_5 = I_3 - I_1 + 2I_3 \Leftrightarrow I_5 = 3I_3 - I_1 \qquad (11)$$

$$(3)\xrightarrow[(11)]{(6),(9)} 3I_1 - 8I_2 = 3I_3 - I_1 + 3I_2 - I_1 \Leftrightarrow 5I_1 - 11I_2 = 3I_3 \qquad (12)$$

$$(5)\xrightarrow[(11)]{(7),(9)} 6I_3 - 2I_1 + 3I_1 - 8I_2 = I_1 - 2I_3 \Leftrightarrow I_2 = I_3 \qquad (13)$$

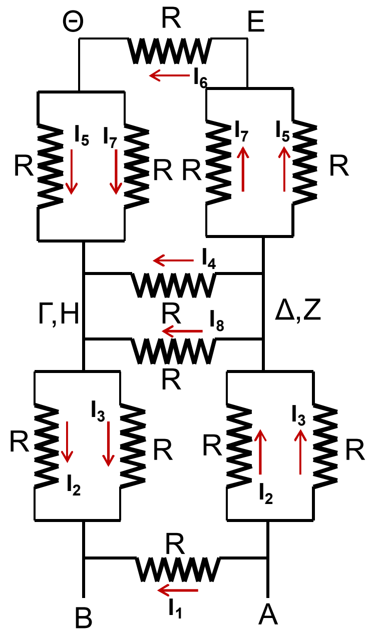
Επομένως από (6), (7): $I_4=I_8$ και από (5), (8): $I_5=I_7$

$$(1)\xrightarrow{(13)} I = I_1 + 2I_2 \qquad (14)$$

$$(12)\xrightarrow{(14)} 5I_1 = 14I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{5}{14}I_1 \qquad (15)$$

$$(15)\xrightarrow{(15)} I = I_1 + 2\frac{5}{14}I_1 \Leftrightarrow I = \frac{12}{7}I_1 \qquad (16)$$

Οπότε: $IR_{AB} = I_1 R \xrightarrow{(16)} \boxed{R_{AB} = \frac{7R}{12}}$

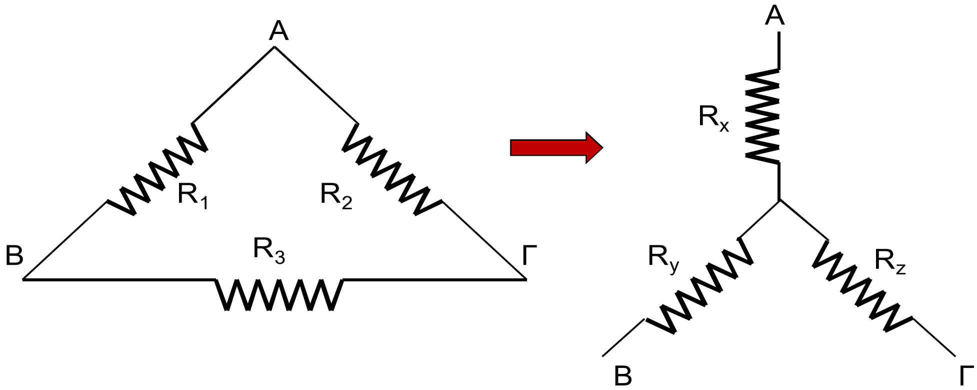


Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος και με δεδομένο ότι οι κλάδοι ΑΔ, ΑΖ διαρρέονται ρεύματα ίσης έντασης, τα σημεία Δ και Ζ είναι ισοδυναμικά. Το ίδιο ισχύει και για τους κλάδους ΒΓ και ΒΗ (Γ, Η ισοδυναμικά σημεία) επομένως οι αντίστοιχοι αντιστάτες μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Επίσης οι αντιστάτες στους κλάδους ΖΗ και ΔΓ είναι συνδεδεμένοι παράλληλα αφού έχουν κοινά άκρα και διαρρέονται από ρεύματα ίσης έντασης δηλαδή $I_4 = I_8$. Αυτό προκύπτει και από τις σχέσεις (6) και (7) με δεδομένο ότι $I_2 = I_3$.
Οι αντιστάτες στους κλάδους ΖΕ και ΔΕ είναι συνδεδεμένοι παράλληλα και διαρρέονται από ρεύματα ίσης έντασης δηλαδή $I_5 = I_7$. Αυτό προκύπτει και από τις σχέσεις (5) και (8) με δεδομένο ότι $I_4 = I_8$. Το ίδιο ακριβώς ισχύει για τους αντιστάτες στους κλάδους ΓΘ και ΗΘ. Η παραπάνω συνδεσμολογία απλοποιείται στο διπλανό σχήμα.

$$R_{\Gamma E\Delta Z} = \frac{\left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+R\right)\frac{R}{2}}{\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+R+\frac{R}{2}} \Leftrightarrow R_{\Gamma E\Delta Z} = \frac{2R}{5} \qquad \text{και} \qquad R_{AB} = \frac{\left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+\frac{2R}{5}\right)R}{\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+\frac{2R}{5}+R} \Leftrightarrow R_{AB} = \frac{7R}{12}$$

2. Μετατροπή συνδεσμολογίας τρίγωνο σε αστέρα

Να υπολογιστούν οι αντιστάτες R_x, R_y, R_z του ισοδύναμου κυκλώματος του αστέρα σε συνάρτηση με τις τιμές των αντιστατών R_1, R_2, R_3 του τριγώνου.



Η συνολική αντίσταση R_{AB} στα άκρα Α και Β του τριγώνου είναι ίση με: $R_{AB} = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$

Η αντίστοιχη στα άκρα Α και Β του αστέρα είναι: $R_{AB} = R_x + R_y$

Συνεπώς ισχύει: $$R_x + R_y = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \qquad (1)$$

Ομοίως για τα άκρα Β και Γ: $$R_y + R_z = \frac{R_3(R_2 + R_1)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2)$$

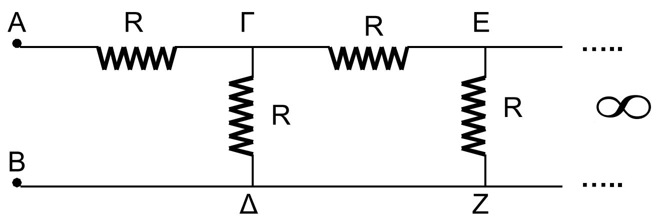
Ομοίως για τα άκρα Α και Γ: $$R_x + R_z = \frac{R_2(R_3 + R_1)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3)$$

(1)+(3)-(2): $\boxed{R_x = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}}$ (1)+(2)-(3): $\boxed{R_y = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}$

και (2)+(3)-(1): $\boxed{R_z = \frac{R_3R_2}{R_1 + R_2 + R_3}}$

3. Υπολογισμός συνολικής αντίστασης συνδεσμολογίας με άπειρο πλήθος αντιστατών
(1^{η} Διεθνής Ολυμπιάδα Φυσικής 1967)

$$R_{AB} = R_{A\Delta} = R + R_{\Gamma\Delta} \quad (1)$$



Η R του κλάδου ΓΔ είναι συνδεδεμένη παράλληλα με τις R του κλάδου ΓΕ και την R_{EZ}.

$$R_{\Gamma Z} = R + R_{EZ} \quad (2)$$

Και επειδή οι αντιστάτες είναι άπειροι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι: $R_{A\Delta} = R_{\Gamma Z}$

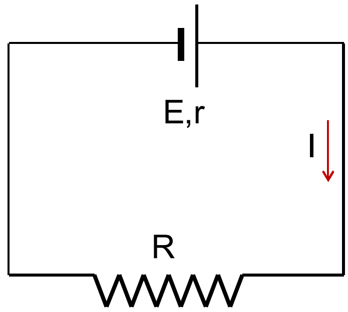
Επομένως: $$R_{\Gamma\Delta} = \frac{R \cdot R_{\Gamma Z}}{R + R_{\Gamma Z}} \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow[(3)]{(2)} R_{AB} = R + \frac{R \cdot R_{AB}}{R + R_{AB}} \Leftrightarrow R_{AB}^2 - R_{AB}R - R^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$R_{AB} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} \Leftrightarrow R_{AB} = R\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow R_{AB} \approx 1{,}62R$$

4. Κατανάλωση μέγιστης ισχύος σε ωμικό αντιστάτη

Ποια πρέπει να είναι η τιμή της αντίστασης του αντιστάτη R ώστε να καταναλώνεται σε αυτόν η μέγιστη δυνατή ισχύς; Ποια η τιμή της μέγιστης ισχύος όταν E=20V και r=5Ω;



Νόμος Ohm για κλειστό κύκλωμα: $I=\dfrac{E}{R+r}$ (1)

και

$$P=I^2R\xrightarrow{(1)}P=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2R$$

1^{ος} τρόπος: $P=\left(\dfrac{E}{R+r}\right)^2R=f(R)$

$P\to\max$ όταν $\dfrac{dP}{dR}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{E}{R+r}\right)^2-\dfrac{2E^2R}{(R+r)^3}=0\Leftrightarrow\dfrac{E^2(R+r)-2E^2R}{(R+r)^3}=0\Leftrightarrow$

$$r-R=0\Leftrightarrow R=r$$

Επομένως: $P=\left(\dfrac{E}{2r}\right)^2r=\dfrac{E^2}{4r}=20W$

2^{ος} τρόπος: $P(R+r)^2=E^2R\Leftrightarrow PR^2+\left(2Pr-E^2\right)R+Pr^2=0$ (2)

Για να έχει πραγματική λύση το τριώνυμο θα πρέπει:

$$\Delta\geq0\Leftrightarrow\left(2Pr-E^2\right)^2-4P^2r^2\geq0\Leftrightarrow E^4-4PrE^2\geq0\Leftrightarrow\frac{E^2}{4r}\geq P$$

επομένως $P_{max}=\dfrac{E^2}{4r}\to P_{max}=20W$

Άρα: $(1)\to\dfrac{E^2}{4r}R^2+\left(2\dfrac{E^2}{4r}r-E^2\right)R+\dfrac{E^2}{4r}r^2=0\Leftrightarrow R^2-2rR+r^2=0\Leftrightarrow(R-r)^2=0\Leftrightarrow R=r$