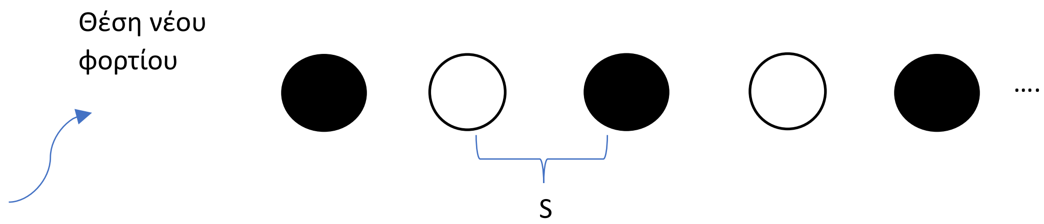
# Μη πεπερασμένη, ασυνεχής κατανομή φορτισμένων σωματιδίων

**Τερλεμές Σπύρος**
spyrosssterlemes@gmail.com
12-4-2021

Έστω μια κατανομή (ημιάπειρη) άπειρων φορτίων, κάθε ένα από τα οποία απέχει απόσταση S από το προηγούμενο και από το επόμενο. Τα μαύρα φορτία είναι θετικά και τα άσπρα αρνητικά. Έχουν την ίδια απόλυτη τιμή φορτίου q. Θέλουμε να προσθέσουμε ακόμα ένα θετικό φορτίο στο τέλος στην αρχή της κατανομής, που να απέχει και αυτό S από το πρώτο μαύρο. Πόση ενέργεια πρέπει να προσφέρουμε, αν αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στο άπειρο και το φέρουμε έπειτα στην προαναφερθείσα θέση?




Κάθε φορτισμένο σωματίδιο, δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο, το οποίο περιγράφεται από μια συνάρτηση δυναμικού $V_i$. Τα πεδία των θετικών φορτίων (μαύρα) περιγράφονται από θετικό δυναμικό, ενώ τα αρνητικά (άσπρα) από αρνητικό. Αν ξεκινήσουμε να μετράμε τα φορτία από το πρώτο θετικό, τότε τα θετικά είναι στις περιττές θέσεις και τα αρνητικά στις ακέραιες. Δηλαδή για τα θετικά έχουμε $2i+1$ και για τα αρνητικά $2i$.

Εμείς ψάχνουμε το δυναμικό στην θέση που απέχει S από το πρώτο φορτίο. Παρατηρούμε ότι το 1$^{ο}$ φορτίο απέχει S, το 2$^{ο}$ απέχει 2S κτλ. Μάλιστα, παρατηρούμε ότι το 3$^{ο}$ απέχει 3S, το 5$^{ο}$ απέχει 5S, και άρα το $2i+1$ απέχει $(2i+1)S$. Οπότε, για τα θετικά φορτία, έχουμε ότι το δυναμικό τους είναι:

$$V_+ = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\varepsilon S(2i+1)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon S}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+1} + 1\right)$$

(1)

Αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι το 2$^{ο}$ φορτίο απέχει 2S, το 4$^{ο}$ 4S, και άρα το $2i$ απέχει $(2i)S$. Οπότε για τα αρνητικά φορτία έχουμε:

$$V_- = \sum_{i=1}^{n} (-1)\frac{q}{4\pi\varepsilon S(2i)} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon S}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i}$$

(2)

Οπότε το συνολικό δυναμικό στην θέση που θέλουμε θα είναι:

$$V=V_{+}+V_{-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon S}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i+1}-\frac{1}{2i}+1\right)$$

(3)

Η σχέση (3) γράφεται στην μορφή:

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon S}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i(2i+1)}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon S}\big(1-(1-ln2)\big)=\frac{q}{4\pi\varepsilon S}ln2$$

(4)

Οπότε το έργο που πρέπει να προσφέρουμε ώστε να φέρουμε ένα νέο φορτίο στην κατανομή, θα είναι ίσο με την δυναμική ενέργεια στην νέα θέση (U=qV), άρα:

$$W=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon S}\ ln2$$

(5)

Αναπτύσσουμε τον λογάριθμο σε Taylor, και παίρνουμε:

$$\ln(x+1)=\sum_{j=1}^{v}\frac{(-1)^{j-1}}{j}x^j=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\ \ \gamma\iota\alpha-1<x\leq 1$$

(6)

Οπότε για x=1 η σχέση (6) μας δίνει:

$$ln2=\ln(1+1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=0{,}693..$$

(7)

Το ανάπτυγμα της (6) μας δίνει μια πολύ καλή προσέγγιση αν προσθέσουμε τους πρώτους 20 όρους, αλλά μπορούμε να βρούμε ανάπτυγμα που να περιγράφει «γρηγορότερα» την προσέγγιση για το ln2. Δηλαδή, αν αναπτύξουμε κατά Taylor την συνάρτηση $\ln(1+x)-\ln(1-x)$ έχουμε:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

(8)

Θέτοντας x=1/3 παίρνουμε την εξαιρετική και γρήγορη προσέγγιση:

$$ln2=\frac{1}{3}+\frac{1}{81}+\frac{1}{1215}+\frac{1}{15309}+\frac{1}{177147}+\cdots=0{,}693\ldots$$

(9)