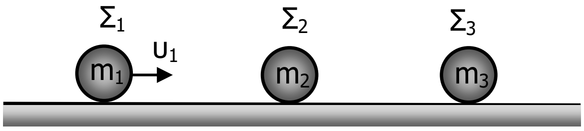
## Και όμως , γίνεται

### Το ερώτημα




Τρεις σφαίρες $Σ_1$ , $Σ_2$ και $Σ_3$ βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και έχουν αντίστοιχα μάζες $m_1$, $m_2$ και $m_3$ και είναι τοποθετημένες με τη διάταξη του διπλανού σχήματος. Εκτοξεύουμε τη σφαίρα $Σ_1$ προς τη σφαίρα $Σ_2$ με ταχύτητα μέτρου $υ_1$.Οι δύο κρούσεις που θα συμβούν μεταξύ των σφαιρών $Σ_1$ και $Σ_2$ και στη συνέχεια μεταξύ των σφαιρών $Σ_2$ και $Σ_3$, είναι κεντρικές και ελαστικές. Τίθεται το ερώτημα, η κινητική ενέργεια που μεταφέρεται στη σφαίρα $Σ_3$ μετά την κρούση της με τη σφαίρα $Σ_2$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια που μεταφέρεται σ' αυτήν, αν απομακρύνουμε τη σφαίρα μάζας $Σ_2$ και η σφαίρα $Σ_1$ κινούμενη με την ίδια ταχύτητα συγκρουστεί μόνο με τη σφαίρα $Σ_3$;

### Απάντηση

Είναι γνωστό ότι κατά την κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες , όταν η μία είναι αρχικά ακίνητη, η μεταφορά κινητικής ενέργειας από την κινούμενη προς την ακίνητη είναι μέγιστη. Επομένως, μια πρώτη εκτίμηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν οι τρεις σφαίρες έχουν ίσες μάζες, η κινητική ενέργεια που αποκτά η σφαίρα $Σ_3$ μετά την κρούση της με τη σφαίρα $Σ_2$ είναι μέγιστη και ίση με την αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας $Σ_1$.

Αν, όμως, οι μάζες των τριών σφαιρών είναι διαφορετικές, η σφαίρα $Σ_1$ μεταφέρει ένα κλάσμα της κινητικής της ενέργειας στη σφαίρα $Σ_2$ και αυτή στη συνέχεια κατά την κρούση της με τη σφαίρα $Σ_3$ μεταφέρει πάλι ένα κλάσμα της κινητικής ενέργειας που είχε αποκτήσει. Έτσι η σφαίρα $Σ_3$ μετά από τις δύο κρούσεις που μεσολαβούν αποκτά ένα κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας που είχε η σφαίρα $Σ_1$.

Διαισθητικά είναι δύσκολο να γίνει αποδεκτό ότι η κινητική ενέργεια που αποκτά η σφαίρα $Σ_3$ με την προηγούμενη διαδικασία μπορεί να είναι μεγαλύτερη από αυτήν που αποκτά η σφαίρα $Σ_3$, όταν η σφαίρα $Σ_1$-με την απουσία της σφαίρας $Σ_2$- συγκρούεται απ' ευθείας με τη σφαίρα $Σ_3$.Είναι όμως έτσι;

Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_1$ που μεταφέρεται στην σφαίρα $Σ_2$ κατά την ελαστική κεντρική κρούση τους, $κ_{12}$ είναι:

$$κ_{12} = \frac{ΔK_2}{K_1} \Rightarrow κ_{12} = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_2'^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2} \Rightarrow κ_{12} = \frac{m_2\left(\frac{2m_1υ_1}{m_1+m_2}\right)^2}{m_1υ_1^2} \Rightarrow κ_{12} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}.$$

Αν $λ_{12} = \frac{m_1}{m_2}$, η τελευταία σχέση γράφεται: $κ_{12} = \frac{4λ_{12}}{(1+λ_{12})^2}$ **(1)**

Αντίστοιχα, το κλάσμα της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_2$ που μεταφέρεται στην σφαίρα $Σ_3$ κατά την ελαστική κεντρική κρούση τους, $κ_{23}$ είναι:

$$κ_{23} = \frac{ΔK_3}{K_2'} \Rightarrow κ_{23} = \frac{\frac{1}{2}m_3υ_3'^2}{\frac{1}{2}m_2υ_2'^2} \Rightarrow κ_{23} = \frac{m_3\left(\frac{2m_2υ_2'}{m_2+m_3}\right)^2}{m_2υ_2'^2} \Rightarrow κ_{23} = \frac{4m_2m_3}{(m_2+m_3)^2}$$

Αν $\lambda_{23}=\dfrac{m_2}{m_3}$, η τελευταία σχέση γράφεται: $\kappa_{23}=\dfrac{4\lambda_{23}}{(1+\lambda_{23})^2}$ **(2)**

Τέλος, το κλάσμα της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $\Sigma_1$ που μεταφέρεται στη σφαίρα $\Sigma_3$ είναι :

$$\kappa_{13}=\frac{\Delta K_3}{K_1}\Rightarrow\kappa_{13}=\frac{\Delta K_3}{K_2'}\frac{K_2'}{K_1}\overset{K_2'=\Delta K_2}{\Rightarrow}\kappa_{13}=\frac{\Delta K_3}{K_2'}\frac{\Delta K_2}{K_1}\Rightarrow\kappa_{13}=\kappa_{23}\kappa_{12}\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}\kappa_{13}=\frac{4\lambda_{23}}{(1+\lambda_{23})^2}\frac{4\lambda_{12}}{(1+\lambda_{12})^2}$$

$$\Rightarrow\kappa_{13}=\frac{4\dfrac{m_2}{m_3}}{(1+\lambda_{23})^2}\frac{4\dfrac{m_1}{m_2}}{(1+\lambda_{12})^2}\Rightarrow\kappa_{13}=\frac{16\dfrac{m_1}{m_3}}{(1+\lambda_{23})^2(1+\lambda_{12})^2}.$$

Αν $\lambda_{13}=\dfrac{m_1}{m_3}$, η τελευταία σχέση γράφεται: $\kappa_{13}=\dfrac{16\lambda_{13}}{(1+\lambda_{23}+\lambda_{12}+\lambda_{12}\lambda_{23})^2}\overset{\lambda_{12}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{m_1}{m_2}\frac{m_3}{m_3}\Rightarrow\lambda_{12}=\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}}}{\Rightarrow}\kappa_{13}=\dfrac{16\lambda_{13}}{(1+\lambda_{23}+\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}}+\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}}\lambda_{23})^2}\Rightarrow$

$$\kappa_{13}=\frac{16\lambda_{13}}{(1+\lambda_{13}+\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}}+\lambda_{23})^2}\quad \textbf{(3)}$$

Στην σχέση **(3)** έχουμε εκφράσει το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας $\Sigma_1$ (μάζας $m_1$) που μεταφέρθηκε τελικά στη σφαίρα στη σφαίρα $\Sigma_3$ (μάζας $m_3$) για δεδομένη τιμή του λόγου $\lambda_{13}=\dfrac{m_1}{m_3}$, ως συνάρτηση του λόγου $\lambda_{23}=\dfrac{m_2}{m_3}$ που μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές, δηλαδή πρόκειται για τη συνάρτηση $\kappa_{13}=f(\lambda_{23})$.

Αν η σφαίρα $\Sigma_2$ μάζας $m_2$ **απομακρυνθεί** και η σφαίρα $\Sigma_1$ μάζας $m_1$ με την ίδια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1$ συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα $\Sigma_3$ μάζας $m_3$, τότε το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται από τη σφαίρα $\Sigma_1$ στη σφαίρα $\Sigma_3$, $\kappa_{13}'$ είναι:

$$\kappa_{13}'=\frac{4\lambda_{13}}{(1+\lambda_{13})^2}\quad \textbf{(4)}$$

Ας δούμε πότε το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται στη σφαίρα $\Sigma_3$ στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο:

$$\kappa_{13}=\kappa_{13}'\underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}}\frac{16\lambda_{13}}{(1+\lambda_{13}+\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}}+\lambda_{23})^2}=\frac{4\lambda_{13}}{(1+\lambda_{13})^2}\Rightarrow\begin{cases}2+2\lambda_{13}=1+\lambda_{13}+\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}}+\lambda_{23}\\ -2-2\lambda_{13}=1+\lambda_{13}+\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}}+\lambda_{23}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_{23}^2-(1+\lambda_{13})\lambda_{23}+\lambda_{13}=0\quad \textbf{(5α)}\\ -(2+2\lambda_{13})=1+\lambda_{13}+\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}}+\lambda_{23}\quad \textbf{(5β)}\end{cases}$$

Η εξίσωση **(5α)** έχει λύσεις τις : $\boldsymbol{\lambda_{23} = \lambda_{13}}$ ή $\frac{m_2}{m_3} = \frac{m_1}{m_3}$ ή $m_1 = m_2$ και $\boldsymbol{\lambda_{23} = 1}$ ή $m_2 = m_3$.

Η εξίσωση **(5β)** είναι αδύνατη γιατί το πρώτο μέλος της είναι μονίμως αρνητικό και το δεύτερο μονίμως θετικό.

Άρα, το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται στην σφαίρα $Σ_3$ μπορεί να είναι ίδιο στις δύο περιπτώσεις , είτε αν $m_1 = m_2$ είτε αν $m_2 = m_3$.

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας $Σ_3$ , όταν η σφαίρα $Σ_2$ είναι παρούσα, γίνεται μέγιστη , όταν $\frac{dκ_{13}}{dλ_{23}} = 0$.

$$\frac{dκ_{13}}{dλ_{23}} = 0 \Leftrightarrow \frac{-16λ_{13}\cdot 2(1+λ_{13}+\frac{λ_{13}}{λ_{23}}+λ_{23})(1-\frac{λ_{13}}{λ^2_{23}})}{(1+λ_{13}+\frac{λ_{13}}{λ_{23}}+λ_{23})^4} = 0 \Leftrightarrow \frac{-32λ_{13}(1-\frac{λ_{13}}{λ^2_{23}})}{(1+λ_{13}+\frac{λ_{13}}{λ_{23}}+λ_{23})^3} = 0$$

Είναι προφανές ότι ο παρανομαστής και ο παράγοντας $λ_{13}$ του αριθμητή δεν μπορούν να είναι μηδέν.

Άρα, $(1-\frac{λ_{13}}{λ^2_{23}}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{λ_{23} = \sqrt{λ_{13}}}$ ή $\frac{m_2}{m_3} = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}} \Rightarrow \boldsymbol{m_2 = \sqrt{m_1 m_3}}$.

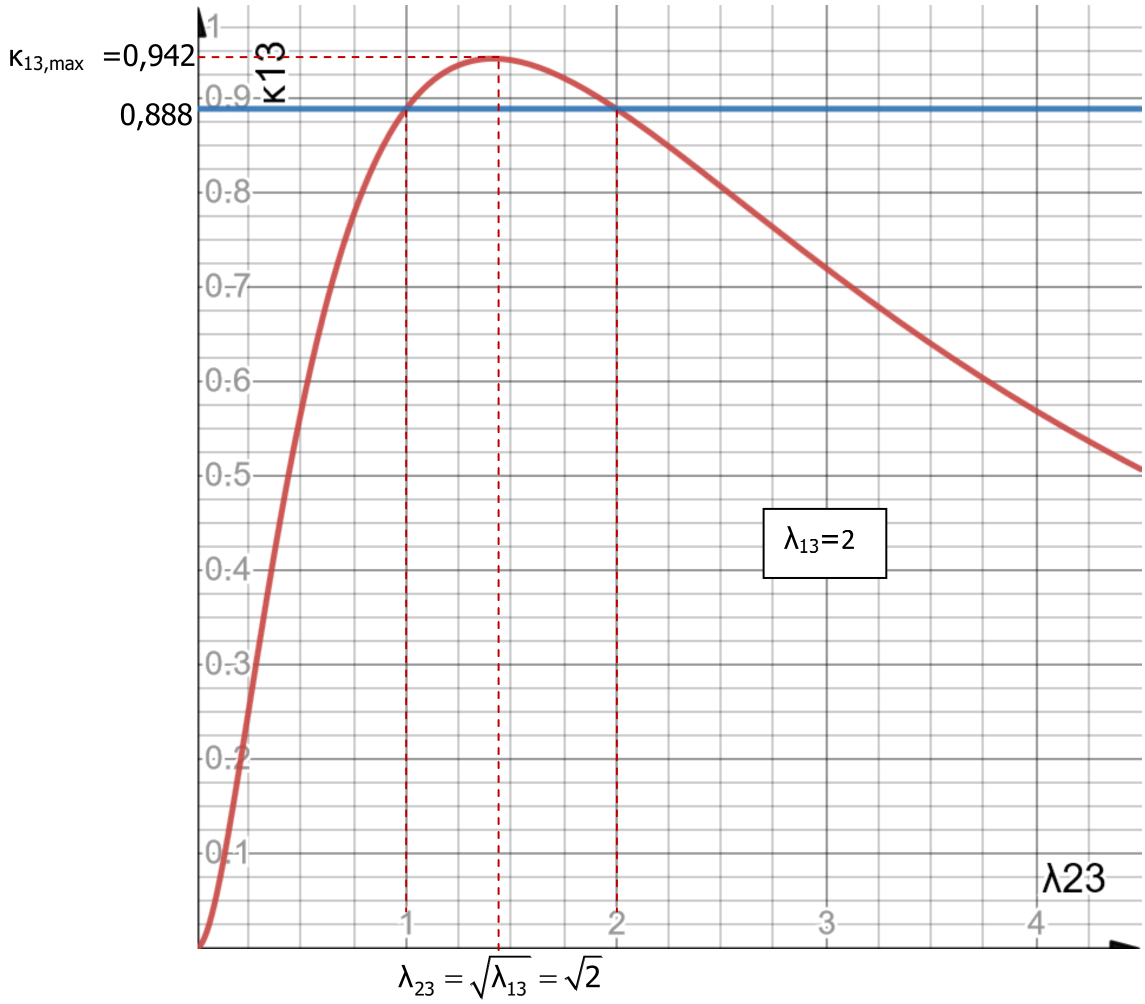
Πράγματι, $\frac{d^2κ_{13}}{dλ^2_{23}} = \frac{-32λ_{13}\left[λ^2_{13}(2λ_{23}-1)+2λ_{13}λ_{23}(4λ_{23}+1)-3λ^4_{23}\right]}{(λ_{23}+1)^4(λ_{13}+λ_{23})^4}$, είναι προφανές ότι ο

παρονομαστής του κλάσματος είναι μονίμως θετικός, όπως και ο όρος $λ_{13}$, άρα το πρόσημο της $2^{ης}$ παραγώγου καθορίζεται από το πρόσημο του παράγοντα $-\left[λ^2_{13}(2λ_{23}-1)+2λ_{13}λ_{23}(4λ_{23}+1)-3λ^4_{23}\right]$, όταν αντικαθίσταται η τιμή $λ_{23} = \sqrt{λ_{13}}$ :

$$-\left[2λ^{5/2}_{13}+4λ^2_{13}+2λ^{3/2}_{13}\right] < 0$$, άρα, το ακρότατο είναι μέγιστο.

Από τη σχέση **(3)** προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή του κλάσματος μεταφοράς ενέργειας στην σφαίρα $Σ_3$ , όταν η σφαίρα $Σ_2$ είναι παρούσα είναι: $κ_{13,max} = \frac{16λ_{13}}{(1+λ_{13}+2\sqrt{λ_{13}})^2}$ , ενώ όταν η σφαίρα $Σ_2$ δεν υπάρχει, δίνεται από τη σχέση **(4)** : $κ'_{13} = \frac{4λ_{13}}{(1+λ_{13})^2}$ για $λ_{13}=1$ ($m_1=m_3$), όπως είναι γνωστό $κ'_{13,max} = 1$.

Στο διάγραμμα του **Σχήματος 1** απεικονίζονται οι σε κοινούς άξονες οι γραφικές παραστάσεις των $κ_{13}=f(λ_{23})$ και $κ'_{13}=f(λ_{23})$, όταν $λ_{13}=2$.

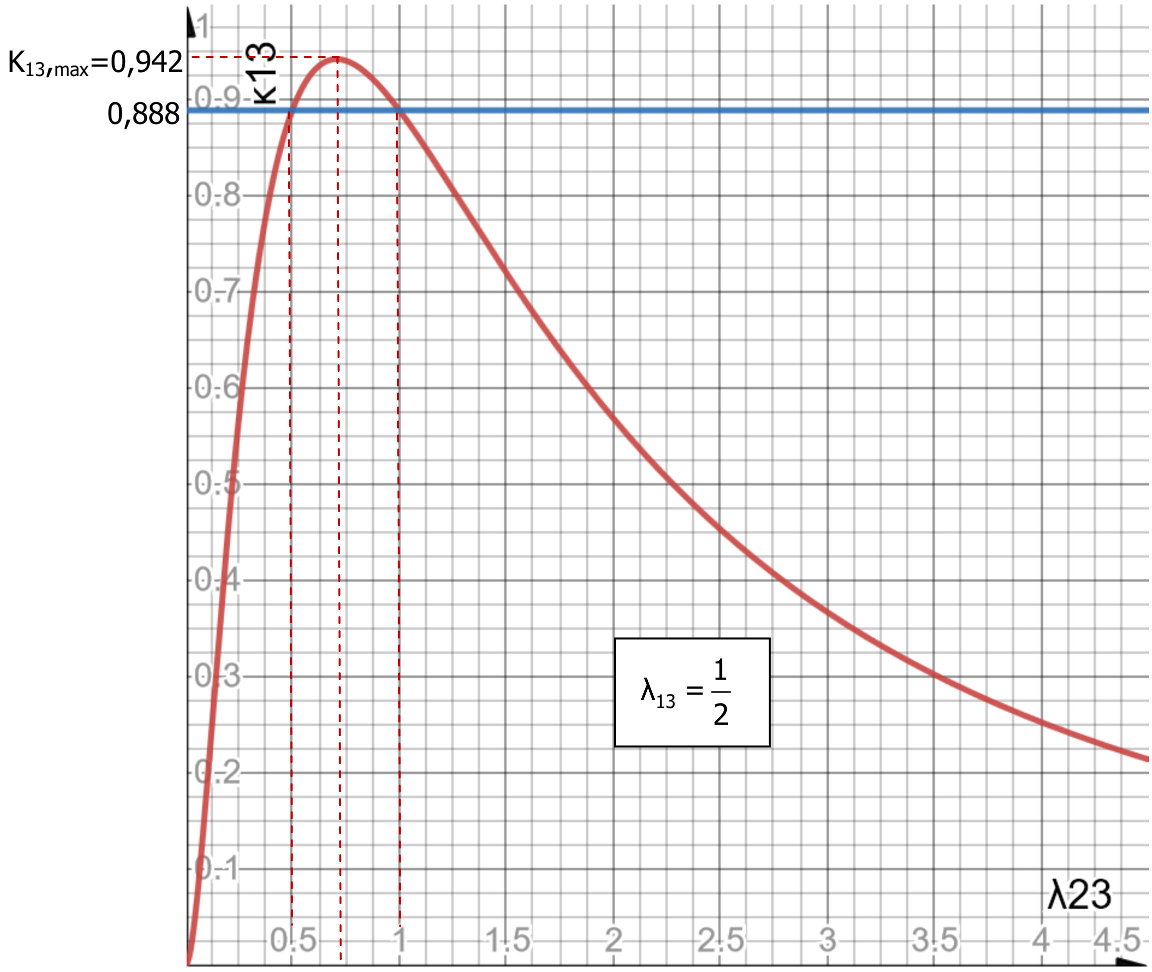



**Σχήμα 1**

Η γραφική παράσταση $\kappa_{13}=f(\lambda_{23})$ ,όταν δεν υπάρχει η σφαίρα μάζας $m_2$ και $\lambda_{13} = \frac{m_1}{m_3} = 2$

Η γραφική παράσταση $\kappa_{13}=f(\lambda_{23})$ ,όταν υπάρχει η σφαίρα μάζας $m_2$ και $\lambda_{13} = \frac{m_1}{m_3} = 2$

Στο διάγραμμα του **Σχήματος 2** απεικονίζονται οι σε κοινούς άξονες οι γραφικές παραστάσεις των $\kappa_{13}=f(\lambda_{23})$ και $\kappa'_{13}=f(\lambda_{23})$, όταν $\lambda_{13} = \frac{1}{2}$.



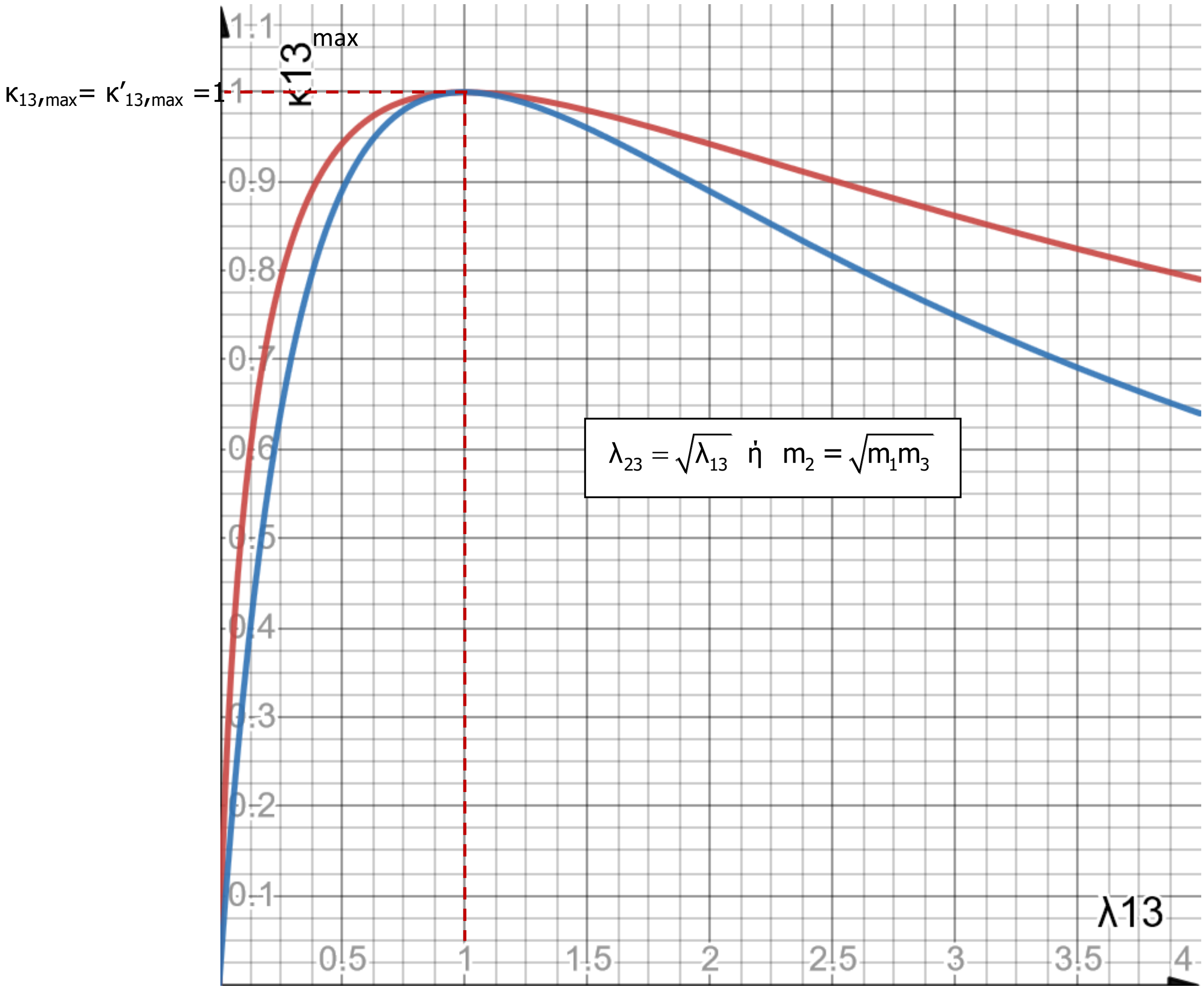

$$\lambda_{23} = \sqrt{\lambda_{13}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

**Σχήμα 2**

Η γραφική παράσταση $\kappa_{13}=f(\lambda_{23})$ ,όταν δεν υπάρχει η σφαίρα μάζας $m_2$ και $\lambda_{13} = \frac{m_1}{m_3} = \frac{1}{2}$

Η γραφική παράσταση $\kappa_{13}=f(\lambda_{23})$ ,όταν υπάρχει η σφαίρα μάζας $m_2$ και $\lambda_{13} = \frac{m_1}{m_3} = \frac{1}{2}$

Στο διάγραμμα του **Σχήματος 3** απεικονίζονται σε κοινούς άξονες οι γραφικές παραστάσεις των $\kappa_{13,max}=f(\lambda_{13})$ και $\kappa'_{13,max}=f(\lambda_{13})$, όταν $\lambda_{23} = \sqrt{\lambda_{13}}$ ή $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$ .




**Σχήμα 3**

Αν $\lambda_{23} = \sqrt{\lambda_{13}}$ ή $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$

Η γραφική παράσταση $\kappa_{13,max}=f(\lambda_{13})$ ,όταν δεν υπάρχει η σφαίρα μάζας $m_2$

Η γραφική παράσταση $\kappa'_{13,max}=f(\lambda_{13})$ ,όταν υπάρχει η σφαίρα μάζας $m_2$

## Συμπεράσματα

**1.** Όπως φαίνεται στα διαγράμματα των Σχημάτων 1 και 2 υπάρχει μια περιοχή τιμών του λόγου $\lambda_{23} = \frac{m_2}{m_3}$ που οριοθετείται μεταξύ των τιμών $\boldsymbol{\lambda_{23} = \lambda_{13}}$ και $\boldsymbol{\lambda_{23} = 1}$ στην οποία η κινητική ενέργεια που μεταφέρεται στη σφαίρα $Σ_3$, όταν υπάρχει η σφαίρα $Σ_2$ είναι μεγαλύτερη από αυτήν που μεταφέρεται σ' αυτήν, όταν η σφαίρα $Σ_2$ είναι απούσα. Το εύρος αυτής της περιοχής τιμών εξαρτάται από την τιμή που έχουμε επιλέξει για τον λόγο $λ_{23} = \frac{m_2}{m_3}$.

**2.** Η κινητική ενέργεια που μεταφέρεται στη σφαίρα $Σ_3$, όταν υπάρχει η σφαίρα $Σ_2$, γίνεται μέγιστη αν $\boldsymbol{λ_{23} = \sqrt{λ_{13}}}$ ή $\mathbf{m_2 = \sqrt{m_1 m_3}}$.

**3.** Όπως φαίνεται στο διάγραμμα του Σχήματος 3, αν $\mathbf{m_2 = \sqrt{m_1 m_3}}$, για οποιαδήποτε τιμή του λόγου $λ_{13} = \frac{m_1}{m_3}$, η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται στη σφαίρα $Σ_3$, όταν υπάρχει η σφαίρα $Σ_2$, είναι μεγαλύτερη σε σχέση με αυτή που μεταφέρεται σ' αυτήν , όταν η σφαίρα $Σ_2$ απουσιάζει!
Οι μέγιστες τιμές της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται στη σφαίρα $Σ_3$ στις δύο περιπτώσεις είναι ίσες μόνον όταν, $λ_{13} = 1$ ή $m_1=m_3(=m_2)$.

Η προσαρμογή εμπέδησης, όπως έχει παρουσιαστεί στην ανάρτηση «Το Θεώρημα Jacobi ,μια συνάρτηση και η διασταλτική εφαρμογή της προσαρμογής εμπέδησης» είναι υπεύθυνη και για όσα περιγράφονται σ' αυτή την παρουσίαση. Όταν η «μάζα = εμπέδηση» $m_2$ της σφαίρας $Σ_2$ προσαρμόζεται σε σχέση με τις «μάζες = εμπεδήσεις» $m_1$ και $m_3$ των σφαιρών $Σ_2$ και $Σ_3$ -γίνεται ίση με το γεωμετρικό μέσο τους- η διαίσθηση για ακόμα μια φορά διαψεύδεται.
Στην εποχή των εγκύκλιων σπουδών μου, ένας από τους δασκάλους μου συνήθιζε να λέει :
-Στη Φυσική, στο 99% των ερωτήσεων η απάντηση είναι "εξαρτάται".Και είχε δίκιο.

**Ξ.Στεργιάδης**