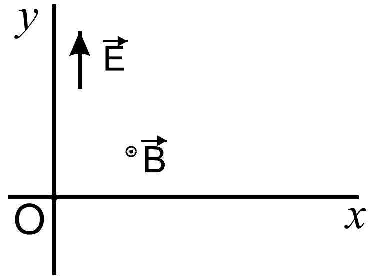
Νίκος Σταματόπουλος

Κυκλοειδής κίνηση φορτισμένου σωματιδίου

Θετικά φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q αφήνεται τη χρονική στιγμή t = 0 ελεύθερο (χωρίς αρχική ταχύτητα) από το σημείο O να κινηθεί μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό και ομογενές μαγνητικό πεδίο των οποίων οι εντάσεις E και B είναι κάθετες μεταξύ τους και με κατευθύνσεις αυτές του σχήματος. Θεωρώντας αμελητέα την επίδραση του πεδίου βαρύτητας,



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με την απόσταση y του σωματιδίου από τον άξονα x΄x.

β) Να δείξετε ότι η συνιστώσα της ταχύτητας του σωματιδίου κατά τον άξονα x΄x είναι ανάλογη με την απόσταση y του σωματιδίου από τον άξονα x΄x.

γ) Βρείτε τα όρια της κίνησης του σωματιδίου στον άξονα y΄y .

δ) Βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σωματιδίου.

ε) Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου στον άξονα y΄y είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογισθεί η περίοδος ταλάντωσης

στ) Να εκφράσετε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου καθώς και τις συνιστώσες της ταχύτητας ως συναρτήσεις του χρόνου.

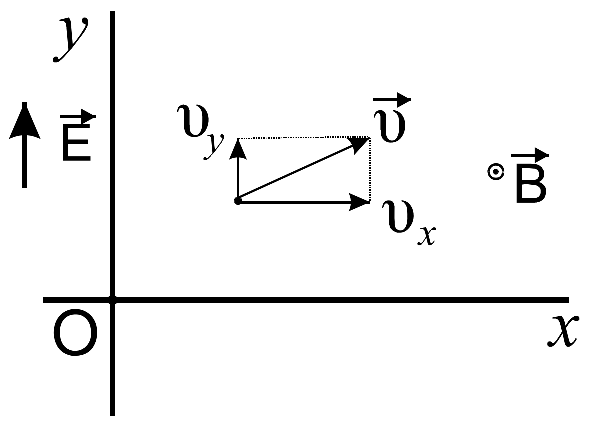
ζ) Σχεδιάστε ποιοτικά την τροχιά του σωματιδίου.

η) Αποδείξτε ότι κίνηση αυτή (που είναι γνωστή ως «κυκλοειδής κίνηση») είναι ισοδύναμη με εκείνη που εκτελεί ένα σημείο της περιφέρειας ενός δίσκου ο οποίος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με $\upsilon_{cm} = E/B$. Από την αναλογία αυτή, υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του άξονα Ox που ανήκουν στην τροχιά του σωματιδίου.

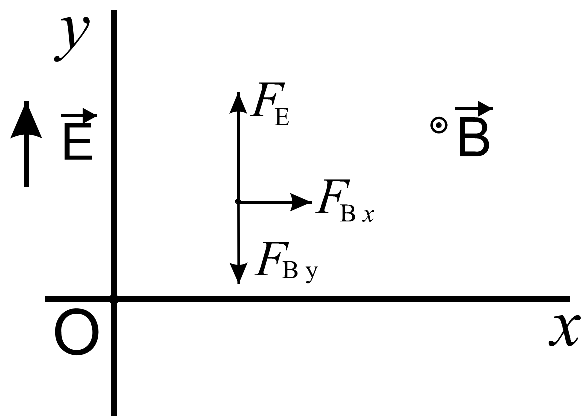
Λύση

α) $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = qEy \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2qE}{m}y}}$ **(1)**

β)



Σχ. 1



Σχ. 2

Αρχικά το φορτίο επιταχύνεται κατά τον άξονα Oy λόγω του ηλεκτρικού πεδίου. Όμως καθώς αποκτά ταχύτητα, η δύναμη Lorentz (που δεν παράγει έργο) αλλάζει τη διεύθυνση της ταχύτητας.
Σε κάποια τυχαία θέση, αναλύοντας την ταχύτητα σε συνιστώσες (σχ.1), οι δυνάμεις που ασκούνται στο φορτίο είναι (βλ. σχ. 2) :

$F_E = qE$, $F_{Bx} = q\upsilon_y B$ και $F_{By} = -q\upsilon_x B$ (οι σχέσεις είναι αλγεβρικές, π.χ. $\upsilon_x > 0 \Rightarrow F_{By} < 0$)

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow qB\upsilon_y = ma_x \Rightarrow qB\frac{\Delta y}{\Delta t} = m\frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta y} = \frac{qB}{m} \text{ (σταθερός λόγος μεταβολής)} \Rightarrow \frac{\upsilon_x - 0}{y - 0} = \frac{qB}{m}$$

$$\boxed{\upsilon_x = \frac{qB}{m}y} \qquad \textbf{(2)}$$

γ) $\upsilon_y^2 = \upsilon^2 - \upsilon_x^2 = \frac{2qE}{m}y - \frac{q^2B^2}{m^2}y^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{q^2B^2}{m^2}y\left(y - \frac{2mE}{qB^2}\right) \leq 0$ δηλαδή $\boxed{0 \leq y \leq \frac{2mE}{qB^2}}$

(3)

δ) από (1) και (3) $\Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{\dfrac{2qE}{m} y_{\max}} = \sqrt{\dfrac{2qE}{m}\dfrac{2mE}{qB^2}} = \dfrac{2E}{B}$

ε) $\Sigma F_y = qE - q\upsilon_x B \overset{(2)}{\Longrightarrow} \Sigma F_y = qE - q\dfrac{qBy}{m}B = qE - \dfrac{q^2B^2}{m}y$

Η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα y΄y γίνεται μηδέν στη θέση y_o όπου

$$qE - \frac{q^2B^2}{m}y_o = 0 \Rightarrow y_o = \frac{mE}{qB^2} = \frac{1}{2}y_{\max} \quad (\Theta\mathrm{I})$$

Θέτουμε $y = y_o + y'$, τότε $\Sigma F_y = -\dfrac{q^2B^2}{m}y'$, άρα ΑΑΤ με $\omega = \sqrt{\dfrac{\frac{q^2B^2}{m}}{m}} = \dfrac{qB}{m} \Rightarrow T = 2\pi/\omega = \dfrac{2\pi m}{qB}$

στ) $0 \le y \le \dfrac{2mE}{qB^2} \Rightarrow 0 \le y_o + y' \le \dfrac{2mE}{qB^2} \Rightarrow -\dfrac{mE}{qB^2} \le y' \le \dfrac{mE}{qB^2}$

άρα $y' = \dfrac{mE}{qB^2}\eta\mu(\omega t + \varphi) \Rightarrow y = \dfrac{mE}{qB^2} + \dfrac{mE}{qB^2}\eta\mu(\omega t + \varphi)$

για t = 0 είναι y = 0 άρα $\eta\mu\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

Επομένως $\boxed{y = \dfrac{mE}{qB^2}(1 - \sigma\upsilon\nu\omega t)}$ **(4)**

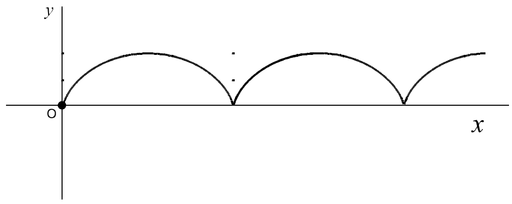
Άρα $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2qE}{m}y} = \sqrt{\dfrac{2qE}{m}\dfrac{mE}{qB^2}(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)} = \dfrac{E}{B}\sqrt{2(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \dfrac{2E}{B}\left|\eta\mu\dfrac{\omega t}{2}\right|}$

(2), (4) $\Rightarrow \boxed{\upsilon_x = \dfrac{qB}{m}\dfrac{mE}{qB^2}(1-\sigma\upsilon\nu\omega t) = \dfrac{E}{B}(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)}$ **(5)**

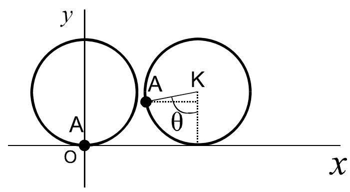
Από την (4) με παραγώγιση προκύπτει:

$\boxed{\upsilon_y = \dfrac{E}{B}\eta\mu\omega t}$ **(6)**

ζ) για t = T/2 το σωματίδιο φθάνει στη μέγιστη απομάκρυνση από τον άξονα Ox,
για t = T επιστρέφει στον άξονα Ox με μηδενική ταχύτητα για να διαγράψει ίδιας μορφής τροχιά με την προηγούμενη κ.ο.κ.



η) Έστω Α ένα σημείο του δίσκου που εκτελεί την ίδια τροχιά με το φορτισμένο σωματίδιο.
Οι αρχικές συνθήκες t = 0 , x = y = 0 και υ = 0 για το σωματίδιο οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το σημείο Α τη χρονική στιγμή t = 0 είναι το σημείο επαφής του δίσκου με το οριζόντιο επίπεδο.
Όταν ο δίσκος περιστραφεί κατά θ = ωt, τότε οι συντεταγμένες x, y του Α είναι:



$x = x_{cm} - R\eta\mu\theta = \upsilon_{cm}t - R\eta\mu\omega t = \omega R t - R\eta\mu\omega t$

$y = R - R\sigma\upsilon\nu\theta = R - R\sigma\upsilon\nu\omega t$

Με παραγώγιση των παραπάνω έχουμε: $\upsilon_x = \omega R - R\omega\sigma\upsilon\nu\omega t = \omega R(1-\sigma\upsilon\nu\omega t) = \upsilon_{cm}(1-\sigma\upsilon\nu\omega t)$

και $\upsilon_y = R\omega\eta\mu\omega t = \upsilon_{cm}\eta\mu\omega t$

Συγκρίνοντας αυτές τις σχέσεις με τις (5) και (6) προκύπτει το ζητούμενο: $\upsilon_{cm} = E/B$.
Το σημείο Α θα ακουμπήσει το έδαφος για πρώτη φορά σε χρόνο Τ και η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με τη μετατόπιση του κέντρου μάζας στον ίδιο χρόνο. Δηλαδή:

$$d = \upsilon_{cm}T = \frac{E}{B}\frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi mE}{qB^2}$$