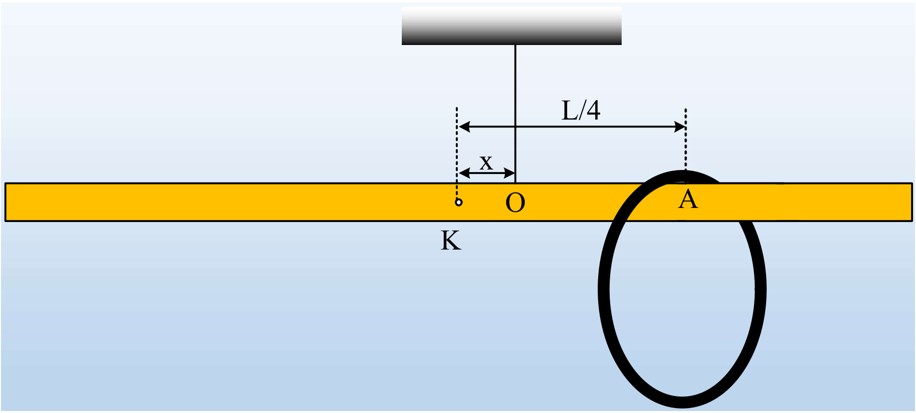
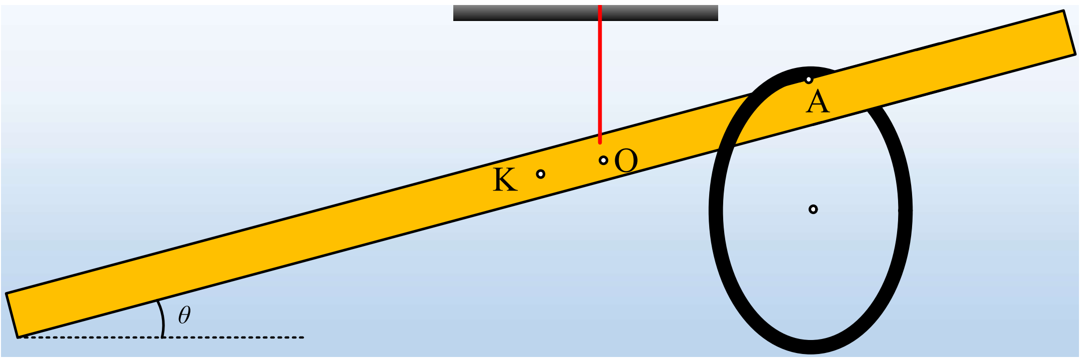
Μια ομογενής ράβδος, ένα δακτυλίδι, το σημείο πρόσδεσης και το είδος της κίνησης

Μια ομογενής ράβδος μήκους L, μάζας M ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Στο σημείο A της ράβδου σε απόσταση L/4 από το μέσο K, κρέμεται ομογενές δακτυλίδι μάζας m=M/2. Η ράβδος είναι δεμένη με αβαρές μη ελαστικό νήμα, στο σημείο O. Το νήμα είναι κατακόρυφο και το άλλο άκρο του είναι δεμένο σε οροφή.



α. Να σχεδιάσετε το βάρος του δακτυλιδιού και να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το νήμα στη ράβδο. Ποια η απόσταση x του σημείου πρόσδεσης του νήματος από το μέσο K της ράβδου;

β. Στρέφουμε τη ράβδο ώστε να σχηματίσει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ το νήμα εξακολουθεί να μένει κατακόρυφο. Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής ώστε το δακτυλίδι να μην ολισθαίνει κατά μήκος της ράβδου; Η ράβδος θα ισορροπήσει στη θέση αυτή ή θα περιστραφεί;

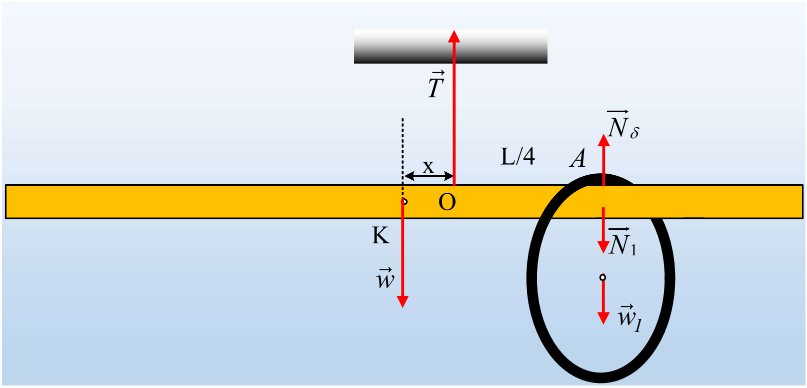


γ. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Να εξετάσετε αν το δακτυλίδι εγκαταλείψει τη ράβδο κατά τη διάρκεια της πτώσης.

Δίνεται το g

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Το βάρος του δακτυλιδιού ασκείται στο Κέντρο Βάρους, το οποίο συμπίπτει με το Κέντρο Μάζας, δηλαδή το κέντρο του δακτυλιδιού



Εφόσον το δακτυλίδι ισορροπεί, δέχεται στο σημείο επαφής με τη ράβδο, δύναμη από τη ράβδο:

$\Sigma\vec{F} = \vec{W}_1 + \vec{N}_\delta = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_\delta = -\vec{W}_1$ Το δακτυλίδι ασκεί στη ράβδο δύναμη: $\vec{N}_1 = -\vec{N}_\delta$

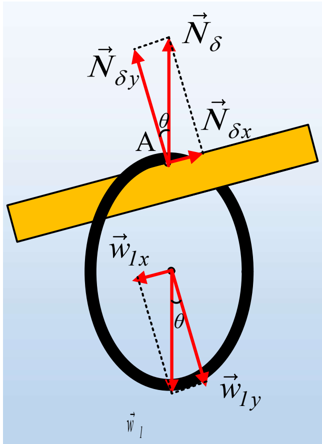
Εφόσον η ράβδος ισορροπεί δέχεται από το νήμα δύναμη:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{T} + \vec{W} + \vec{N}_1 = \vec{0} \Rightarrow T - W - N_1 = 0 \Rightarrow T = W + N_1 = W + W_1 \Rightarrow T = Mg + mg \Rightarrow T = \frac{3}{2}Mg$$

Λόγω περιστροφικής ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(o)} = 0 \Rightarrow W\cdot x - N_1\cdot(\frac{L}{4} - x) = 0 \Rightarrow Mg\cdot x = \frac{M}{2}g\frac{L}{4} - \frac{M}{2}g\cdot x \Rightarrow \frac{3}{2}Mg\cdot x = Mg\frac{L}{8} \Rightarrow x = \frac{L}{12}$$

Αξίζει να σημειώσουμε πως το σημείο πρόσδεσης του νήματος (Ο) δεν συμπίπτει με το Κέντρο Μάζας του συστήματος ράβδος-δακτυλίδι, το οποίο δεν βρίσκεται πάνω στη ράβδο, αλλά στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το ΚΜ της ομογενούς ράβδου, δηλαδή το μέσο της Κ, με το κέντρο του δακτυλιδιού. Αν αυτό έχει μήκος d, το ΚΜ απέχει απόσταση d/3 από το Κ και βρίσκεται στην κατακόρυφη που ορίζει το νήμα πρόσδεσης, γι αυτό και η τάση του νήματος δεν δημιουργεί ροπή ως προς το ΚΜ του συστήματος.



β. Το δακτυλίδι εφόσον ισορροπεί συνεχίζει να δέχεται από τη ράβδο δύναμη $\vec{N}_\delta$ αντίθετη του βάρους του. Η δύναμη αναλύεται σε $\vec{N}_{\delta(x)}$ συνιστώσα στη διεύθυνση της ράβδου και $\vec{N}_{\delta(y)}$ συνιστώσα σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο. Η συνιστώσα $\vec{N}_{\delta(x)}$ είναι η στατική τριβή που δέχεται το δακτυλίδι από τη ράβδο.

Από την ισορροπία του δακτυλιδιού έχουμε:

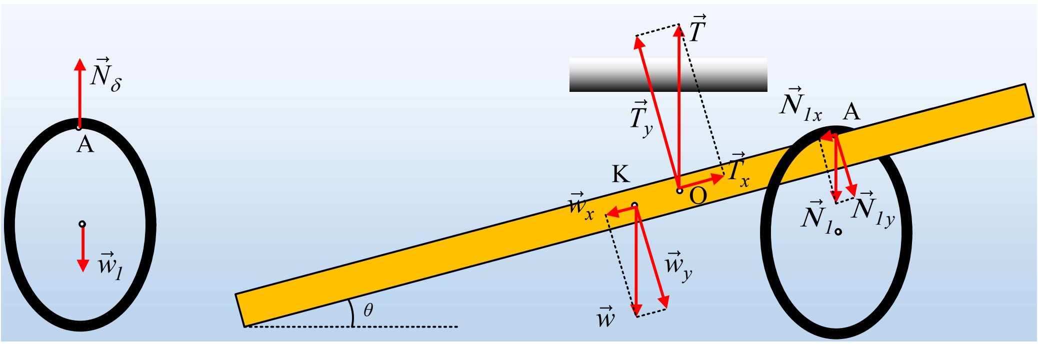
$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_{\delta y} + \vec{W}_{1y} = \vec{0} \Rightarrow N_{\delta y} - W_{1y} = 0 \Rightarrow N_{\delta y} = W_{1y} \Rightarrow N_{\delta y} = mg\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_{\delta x} + \vec{W}_{1x} = \vec{0} \Rightarrow N_{\delta x} - W_{1x} = 0 \Rightarrow N_{\delta x} = W_{1x} \Rightarrow N_{\delta x} = mg\eta\mu\theta \Rightarrow T_{\sigma\tau} = mg\eta\mu\theta$$

Για να είναι η τριβή στατική πρέπει: $T_{\sigma\tau} \le T_{o\rho} \Rightarrow mg\eta\mu\theta \le \mu_s mg\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \mu_s \ge \dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\theta$

Η ράβδος θα παραμείνει ακίνητη στη θέση που τη στρέψαμε, αφού το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο Ο, σημείο πρόσδεσης του νήματος, αλλά και ως προς το ΚΜ του συστήματος ράβδος-δακτυλίδι, το οποίο βρίσκεται στην κατακόρυφη που ορίζει το νήμα, είναι μηδενικό.

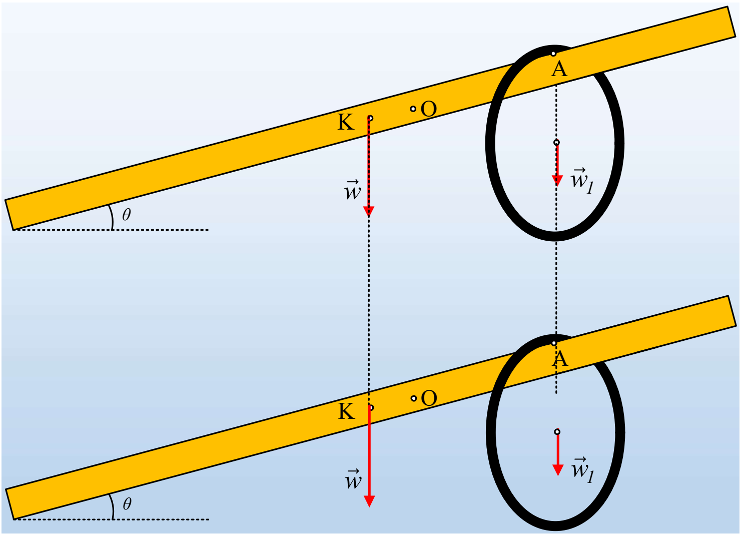
$$\Sigma\tau_{(o)} = W\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\frac{L}{12} - N_1\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\left(\frac{L}{4}-\frac{L}{12}\right) = Mg\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\frac{L}{12} - \frac{M}{2}g\sigma\upsilon\nu\theta\frac{L}{6} = 0$$



γ. Για να εγκαταλείψει το δακτυλίδι τη ράβδο, θα πρέπει αυτή να εκτελέσει σύνθετη κίνηση, ώστε να περιστραφεί γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το ΚΜ του συστήματος ράβδος-δακτυλίδι. Κάτι τέτοιο όμως δεν πρόκειται να συμβεί, αφού το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών τη στιγμή που κόβεται το νήμα, ως προς το σημείο (Ο) αλλά και ως προς το ΚΜ του συστήματος ράβδος-δακτυλίδι, που βρίσκεται στην κατακόρυφο που ορίζει το νήμα, είναι μηδέν:

$$\Sigma\tau_{(o)} = Mg\frac{L}{12}\sigma\upsilon\nu\theta - N_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta(\frac{L}{4}-\frac{L}{12}) = Mg\frac{L}{12}\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{M}{2}g\sigma\upsilon\nu\theta\frac{L}{6} = 0$$

Η ράβδος πέφτοντας θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση και θα μετατοπίζεται παράλληλα προς την αρχική της θέση, οπότε το δακτυλίδι θα παραμείνει στην αρχική θέση του



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στη διάρκεια της καθόδου η ράβδος και το δακτυλίδι διατηρούν την επαφή τους, αλλά δεν αναπτύσσονται δυνάμεις ανάμεσά τους. Αυτό θα ισχύει αφού κάθε σώμα θα πέφτει με την ίδια επιτάχυνση α=g. Μια πρόταση σε αυτό, από τον Βαγγέλη Κουντούρη:

«η επιτάχυνση της ράβδου θα είναι τουλάχιστον g, λόγω του βάρους της, και μεγαλύτερη αν δέχεται και δύναμη Ν, προς τα κάτω, από το δαχτυλίδι

η επιτάχυνση του δαχτυλιδιού θα είναι το πολύ g, λόγω του βάρους του, και μικρότερη αν δέχεται δύναμη Ν, προς τα πάνω, από τη ράβδο….

το μεγαλύτερη και μικρότερη αν ισχύουν, θα ισχύουν **ταυτόχρονα**,

όταν κοπεί το νήμα η ράβδος θα “θέλει” να κινηθεί πιο γρήγορα από το δαχτυλίδι, οπότε η δύναμη Ν θα μειώνεται ώσπου να γίνει 0, **πρακτικά ακαριαία**, άρα **η ράβδος θα πέσει με την ελάχιστη δυνατή επιτάχυνση**, δηλαδή g, και **το δαχτυλίδι με τη μέγιστη δυνατή**, δηλαδή g, τα δύο σώματα, δηλαδή θα κάνουν ταυτόχρονη ελεύθερη πτώση σε επαφή μεταξύ τους, αλλά χωρίς δύναμη επαφής

Παπασγουρίδης Θοδωρής

papasgou@gmail.com