**Σημειακοί μετασχηματισμοί της συνάρτησης Lagrange**

**Τερλεμές Σπύρος**spyrosssterlemes@gmail.com
15-4-2021

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα σωμάτων, του οποίου η συνάρτηση Lagrange L, είναι εκφρασμένη ως προς ορισμένες γενικευμένες συντεταγμένες (και ταχύτητες). Αυτό το σύστημα ακολουθεί την αρχή του Hamilton, με την φυσική τροχιά να είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση L να υπακούει στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Αν μετασχηματίσουμε κάθε γενικευμένη συντεταγμένη σε μια άλλη συντεταγμένη, τότε η συνάρτηση L δεν θα είναι πλέον συνάρτηση των αρχικών γενικευμένων συντεταγμένων και ταχυτήτων, αλλά θα είναι συνάρτηση των νέων συντεταγμένων μετά τους μετασχηματισμούς. Ουσιαστικά δηλαδή, με αυτόν το μετασχηματισμό, η φυσική τροχιά του συστήματος απλά περιγράφεται μέσω άλλων συντεταγμένων. Το αναμενόμενο είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange να παραμένουν αναλλοίωτες στον μετασχηματισμό, αφού η αρχή του Hamilton πρέπει πάλι να ισχύει.

Έστω ότι η συνάρτηση Lagrange είναι αρχικά:

$$L=L\left(x\_{1},…x\_{n},\dot{x}\_{1},…\dot{x}\_{n},t\right)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange ισχύουν για κάθε «ζευγάρι» γενικευμένων συντεταγμένων και ταχυτήτων. Οπότε αν πάρουμε μια συντεταγμένη $x\_{i}=x$ τότε θα πρέπει να έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L}{∂\dot{x}}\right)-\frac{∂L}{∂x}=0$$

(1)

Έστω ότι μετασχηματίζουμε κάθε συντεταγμένη, έτσι ώστε η νέα συνάρτηση Lagrange L’ να είναι πλέον συνάρτηση των μετασχηματισμών. Δηλαδή έστω ο μετασχηματισμός $q\_{i}=q\_{i}(x\_{i},t)$, τότε η νέα Lagragian είναι:

$$L^{'}=L^{'}\left(q\_{1},…q\_{n},\dot{q}\_{1},…\dot{q}\_{n},t\right)$$

(2)

Tο λογικό είναι, εφόσον η φυσική τροχιά δεν αλλάζει, απλά εκφράζεται από άλλες συντεταγμένες, οι εξισώσεις Euler-Lagrange, να συνεχίσουν να ισχύουν στον μετασχηματισμό. Δηλαδή η σχέση (1) να γίνει τώρα:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\right)-\frac{∂L^{'}}{∂x}=0$$

(3)

Ουσιαστική στην ανάλυση αυτή, θα αποδείξω ότι όντως η σχέση (3) ισχύει. Αρχικά ο σημειακός μετασχηματισμός $q\_{i}$ δεν μπορεί να έχει αλλάξει την τιμή της συνάρτησης Lagrange. Οπότε αριθμητικά, θα ισχύει η ισότητα $L≡L'$. Αυτό σημαίνει ότι τόσο η γενικευμένη ορμή όσο και η γενικευμένη δύναμη της σχέσης (1) μπορούν να εκφραστούν λόγω της αριθμητικής ισότητας των Lagragian, ως γενικευμένες ορμές και δυνάμεις στις $q\_{i}$ συντεταγμένες. Αρχικά έχουμε ότι:

$$\frac{∂L}{∂x}=\frac{∂L^{'}\left(..q..,…\dot{q}..,t\right)}{∂x}=\frac{∂L^{'}}{∂q}\frac{∂q}{∂x}+\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\frac{∂\dot{q}}{∂x}$$

(4)

Όμως ισχύει ότι:

$$\dot{q}=\frac{dq}{dt}=\frac{∂q}{∂x}\dot{x}+\frac{∂q}{∂t}$$

(5)

Έτσι η σχέση (4) με την βοήθεια της (5) γράφεται τώρα:

$$\frac{∂L}{∂x}=\frac{∂L^{'}}{∂q}\frac{∂q}{∂x}+\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\frac{∂^{2}q}{∂x^{2}}\dot{x}+\frac{∂L^{'}}{∂x}\frac{∂^{2}q}{∂x∂t}$$

(6)

Αντίστοιχα, για την γενικευμένη ορμή της (1) θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{∂L}{∂\dot{x}}=\frac{∂L^{'}\left(…q…,…\dot{q}..,t\right)}{∂\dot{x}}=\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\frac{∂\dot{q}}{∂\dot{x}}$$

(7)

Η σχέση (7) τώρα, με την βοήθεια της (5) γράφεται:

$$\frac{∂L}{∂\dot{x}}=\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\frac{∂q}{∂x}$$

(8)

Παραγωγίζοντας χρονικά την (8) παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L}{∂\dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\right)\frac{∂q}{∂x}+\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\frac{d}{dt}\left(\frac{∂q}{∂x}\right)$$

(9)

Όμως, ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂q}{∂x}\right)=\frac{∂^{2}q}{∂x^{2}} \dot{x}+\frac{∂^{2}q}{∂t∂x}=\frac{∂^{2}q}{∂x^{2}} \dot{x}+\frac{∂^{2}q}{∂x∂t}$$

(10)

Έτσι, η σχέση (9) παίρνει τώρα την μορφή:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L}{∂\dot{x}}\right)=\frac{∂q}{∂x}\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\right)+\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\frac{∂^{2}q}{∂x^{2}}\dot{x}+\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\frac{∂^{2}q}{∂x∂t}$$

(11)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (11) και (6), παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L}{∂\dot{x}}\right)-\frac{∂L}{∂x}=\frac{∂q}{∂x} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\right)-\frac{∂L^{'}}{∂q}\right]$$

(12)

Όμως από την σχέση (1), το πρώτο μέλος της (12) είναι μηδενικό, άρα έχουμε:

$$\frac{∂q}{∂x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}}\right)-\frac{∂L^{'}}{∂q}\right]=0$$

(13)

Για να ικανοποιείται η σχέση (13) πρέπει τουλάχιστον ένας από τους όρους του γινομένου να είναι μηδενικός. Άμα ο πρώτος όρος (η μερική χωρική παράγωγος του μετασχηματισμού q) είναι μηδέν, τότε το q δεν είναι συνάρτηση του x αλλά μόνο του χρόνου. Αυτό όμως σημαίνει πως δεν έχει γίνει κάποιος χωρικός μετασχηματισμός αφού $q=q\left(t\right)$. Από την υπόθεση όμως ότι $q=q(x,t)$ καταλήγουμε ότι δεν μπορεί να μηδενίζεται ο πρώτος όρος του γινομένου. Άρα σύμφωνα με την (13) είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂L^{'}}{∂\dot{q}\_{i}}\right)-\frac{∂L^{'}}{∂q\_{i}}=0$$

(14)

Οπότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange συνεχίζουν να ισχύουν, άρα παραμένουν αναλλοίωτες σε οποιονδήποτε σημειακό μετασχηματισμό (σε αντίθεση φυσικά με τον δεύτερο νόμο του Newton, ο οποίος έχει διαφορετική μορφή στις καρτεσιανές, διαφορετική στις πολικές κτλ.).