**Σημειακοί μετασχηματισμοί της συνάρτησης Lagrange**

**Τερλεμές Σπύρος**[spyrosssterlemes@gmail.com](mailto:spyrosssterlemes@gmail.com)  
15-4-2021

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα σωμάτων, του οποίου η συνάρτηση Lagrange L, είναι εκφρασμένη ως προς ορισμένες γενικευμένες συντεταγμένες (και ταχύτητες). Αυτό το σύστημα ακολουθεί την αρχή του Hamilton, με την φυσική τροχιά να είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση L να υπακούει στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Αν μετασχηματίσουμε κάθε γενικευμένη συντεταγμένη σε μια άλλη συντεταγμένη, τότε η συνάρτηση L δεν θα είναι πλέον συνάρτηση των αρχικών γενικευμένων συντεταγμένων και ταχυτήτων, αλλά θα είναι συνάρτηση των νέων συντεταγμένων μετά τους μετασχηματισμούς. Ουσιαστικά δηλαδή, με αυτόν το μετασχηματισμό, η φυσική τροχιά του συστήματος απλά περιγράφεται μέσω άλλων συντεταγμένων. Το αναμενόμενο είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange να παραμένουν αναλλοίωτες στον μετασχηματισμό, αφού η αρχή του Hamilton πρέπει πάλι να ισχύει.

Έστω ότι η συνάρτηση Lagrange είναι αρχικά:

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange ισχύουν για κάθε «ζευγάρι» γενικευμένων συντεταγμένων και ταχυτήτων. Οπότε αν πάρουμε μια συντεταγμένη τότε θα πρέπει να έχουμε:

(1)

Έστω ότι μετασχηματίζουμε κάθε συντεταγμένη, έτσι ώστε η νέα συνάρτηση Lagrange L’ να είναι πλέον συνάρτηση των μετασχηματισμών. Δηλαδή έστω ο μετασχηματισμός , τότε η νέα Lagragian είναι:

(2)

Tο λογικό είναι, εφόσον η φυσική τροχιά δεν αλλάζει, απλά εκφράζεται από άλλες συντεταγμένες, οι εξισώσεις Euler-Lagrange, να συνεχίσουν να ισχύουν στον μετασχηματισμό. Δηλαδή η σχέση (1) να γίνει τώρα:

(3)

Ουσιαστική στην ανάλυση αυτή, θα αποδείξω ότι όντως η σχέση (3) ισχύει. Αρχικά ο σημειακός μετασχηματισμός δεν μπορεί να έχει αλλάξει την τιμή της συνάρτησης Lagrange. Οπότε αριθμητικά, θα ισχύει η ισότητα . Αυτό σημαίνει ότι τόσο η γενικευμένη ορμή όσο και η γενικευμένη δύναμη της σχέσης (1) μπορούν να εκφραστούν λόγω της αριθμητικής ισότητας των Lagragian, ως γενικευμένες ορμές και δυνάμεις στις συντεταγμένες. Αρχικά έχουμε ότι:

(4)

Όμως ισχύει ότι:

(5)

Έτσι η σχέση (4) με την βοήθεια της (5) γράφεται τώρα:

(6)

Αντίστοιχα, για την γενικευμένη ορμή της (1) θα πρέπει να ισχύει ότι:

(7)

Η σχέση (7) τώρα, με την βοήθεια της (5) γράφεται:

(8)

Παραγωγίζοντας χρονικά την (8) παίρνουμε:

(9)

Όμως, ισχύει ότι:

(10)

Έτσι, η σχέση (9) παίρνει τώρα την μορφή:

(11)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (11) και (6), παίρνουμε:

(12)

Όμως από την σχέση (1), το πρώτο μέλος της (12) είναι μηδενικό, άρα έχουμε:

(13)

Για να ικανοποιείται η σχέση (13) πρέπει τουλάχιστον ένας από τους όρους του γινομένου να είναι μηδενικός. Άμα ο πρώτος όρος (η μερική χωρική παράγωγος του μετασχηματισμού q) είναι μηδέν, τότε το q δεν είναι συνάρτηση του x αλλά μόνο του χρόνου. Αυτό όμως σημαίνει πως δεν έχει γίνει κάποιος χωρικός μετασχηματισμός αφού . Από την υπόθεση όμως ότι καταλήγουμε ότι δεν μπορεί να μηδενίζεται ο πρώτος όρος του γινομένου. Άρα σύμφωνα με την (13) είναι:

(14)

Οπότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange συνεχίζουν να ισχύουν, άρα παραμένουν αναλλοίωτες σε οποιονδήποτε σημειακό μετασχηματισμό (σε αντίθεση φυσικά με τον δεύτερο νόμο του Newton, ο οποίος έχει διαφορετική μορφή στις καρτεσιανές, διαφορετική στις πολικές κτλ.).