# Σημειακοί μετασχηματισμοί της συνάρτησης Lagrange

**Τερλεμές Σπύρος**
spyrosssterlemes@gmail.com
15-4-2021

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα σωμάτων, του οποίου η συνάρτηση Lagrange L, είναι εκφρασμένη ως προς ορισμένες γενικευμένες συντεταγμένες (και ταχύτητες). Αυτό το σύστημα ακολουθεί την αρχή του Hamilton, με την φυσική τροχιά να είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση L να υπακούει στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Αν μετασχηματίσουμε κάθε γενικευμένη συντεταγμένη σε μια άλλη συντεταγμένη, τότε η συνάρτηση L δεν θα είναι πλέον συνάρτηση των αρχικών γενικευμένων συντεταγμένων και ταχυτήτων, αλλά θα είναι συνάρτηση των νέων συντεταγμένων μετά τους μετασχηματισμούς. Ουσιαστικά δηλαδή, με αυτόν το μετασχηματισμό, η φυσική τροχιά του συστήματος απλά περιγράφεται μέσω άλλων συντεταγμένων. Το αναμενόμενο είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange να παραμένουν αναλλοίωτες στον μετασχηματισμό, αφού η αρχή του Hamilton πρέπει πάλι να ισχύει.

Έστω ότι η συνάρτηση Lagrange είναι αρχικά:

$$L = L(x_1, \dots x_n, \dot{x}_1, \dots \dot{x}_n, t)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange ισχύουν για κάθε «ζευγάρι» γενικευμένων συντεταγμένων και ταχυτήτων. Οπότε αν πάρουμε μια συντεταγμένη $x_i = x$ τότε θα πρέπει να έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

(1)

Έστω ότι μετασχηματίζουμε κάθε συντεταγμένη, έτσι ώστε η νέα συνάρτηση Lagrange L’ να είναι πλέον συνάρτηση των μετασχηματισμών. Δηλαδή έστω ο μετασχηματισμός $q_i = q_i(x_i, t)$, τότε η νέα Lagragian είναι:

$$L' = L'(q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n, t)$$

(2)

Το λογικό είναι, εφόσον η φυσική τροχιά δεν αλλάζει, απλά εκφράζεται από άλλες συντεταγμένες, οι εξισώσεις Euler-Lagrange, να συνεχίσουν να ισχύουν στον μετασχηματισμό. Δηλαδή η σχέση (1) να γίνει τώρα:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x} = 0$$

(3)

Ουσιαστική στην ανάλυση αυτή, θα αποδείξω ότι όντως η σχέση (3) ισχύει. Αρχικά ο σημειακός μετασχηματισμός $q_i$ δεν μπορεί να έχει αλλάξει την τιμή της συνάρτησης Lagrange. Οπότε αριθμητικά, θα ισχύει η ισότητα $L \equiv L'$. Αυτό σημαίνει ότι τόσο η γενικευμένη ορμή όσο και η γενικευμένη δύναμη της σχέσης (1) μπορούν να εκφραστούν λόγω της αριθμητικής ισότητας των Lagragian, ως γενικευμένες ορμές και δυνάμεις στις $q_i$ συντεταγμένες. Αρχικά έχουμε ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L'(..q..,...\dot{q}..,t)}{\partial x} = \frac{\partial L'}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial x}$$

(4)

Όμως ισχύει ότι:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial q}{\partial t}$$

(5)

Έτσι η σχέση (4) με την βοήθεια της (5) γράφεται τώρα:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L'}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial L'}{\partial x}\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}$$

(6)

Αντίστοιχα, για την γενικευμένη ορμή της (1) θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'(...q...,...\dot{q}..,t)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{x}}$$

(7)

Η σχέση (7) τώρα, με την βοήθεια της (5) γράφεται:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial x}$$

(8)

Παραγωγίζοντας χρονικά την (8) παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right)\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

(9)

Όμως, ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\,\dot{x} + \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\,\dot{x} + \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}$$

(10)

Έτσι, η σχέση (9) παίρνει τώρα την μορφή:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}$$

(11)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (11) και (6), παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q}\right]$$

(12)

Όμως από την σχέση (1), το πρώτο μέλος της (12) είναι μηδενικό, άρα έχουμε:

$$\frac{\partial q}{\partial x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q}\right] = 0$$

(13)

Για να ικανοποιείται η σχέση (13) πρέπει τουλάχιστον ένας από τους όρους του γινομένου να είναι μηδενικός. Άμα ο πρώτος όρος (η μερική χωρική παράγωγος του μετασχηματισμού q) είναι μηδέν, τότε το q δεν είναι συνάρτηση του x αλλά μόνο του χρόνου. Αυτό όμως σημαίνει πως δεν έχει γίνει κάποιος χωρικός μετασχηματισμός αφού $q = q(t)$. Από την υπόθεση όμως ότι $q = q(x, t)$ καταλήγουμε ότι δεν μπορεί να μηδενίζεται ο πρώτος όρος του γινομένου. Άρα σύμφωνα με την (13) είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0$$

(14)

Οπότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange συνεχίζουν να ισχύουν, άρα παραμένουν αναλλοίωτες σε οποιονδήποτε σημειακό μετασχηματισμό (σε αντίθεση φυσικά με τον δεύτερο νόμο του Newton, ο οποίος έχει διαφορετική μορφή στις καρτεσιανές, διαφορετική στις πολικές κτλ.).