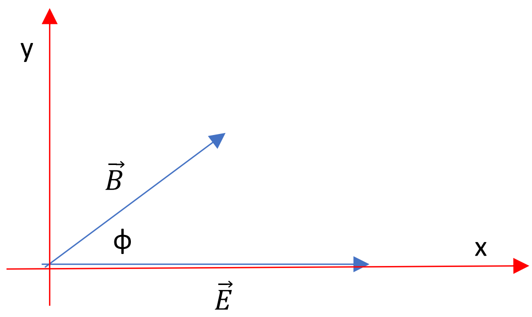
Σωματίδιο εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
3-4-2021

Έστω ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου q που βρίσκεται εντός ομογενούς ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{E}$ είναι οριζόντιο και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ βρίσκεται στο επίπεδο και σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\vec{E}$. Αρχικά το σωματίδιο είναι ακίνητο.



Η δύναμη Lorentz στο σωματίδιο είναι:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

(1)

Για το εξωτερικό γινόμενο έχουμε:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ Bcos\varphi & Bsin\varphi & 0 \end{vmatrix} = -Bsin\varphi\dot{z}\hat{x} + Bcos\varphi\dot{z}\hat{y} + B(sin\varphi\dot{x} - cos\varphi\dot{y})\hat{z}$$

(2)

Εφόσον είναι $\vec{E} = E\hat{x}$ η διανυσματική σχέση (1) μετατρέπεται βάσει της (2) στις:

$$Fx = q(E - Bsin\varphi\dot{z}) = m\ddot{x}$$

$$Fy = qBcos\varphi\dot{z} = m\ddot{y}$$

$$Fz = qB(sin\varphi\dot{x} - cos\varphi\dot{y}) = m\ddot{z}$$

(3)

Ολοκληρώνουμε τις δύο πρώτες σχέσεις:

$$\dot{x} = \frac{q}{m}Et - \frac{qB}{m}sin\varphi z$$

$$\dot{y} = \frac{qB}{m}cos\varphi z$$

$$\ddot{z} = \frac{qB}{m}(sin\varphi\dot{x} - cos\varphi\dot{y})$$

(4)

Αντικαθιστούμε τις δύο πρώτες σχέσεις στην τρίτη και παίρνουμε:

$$\ddot{z} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 z = \frac{q^2}{m^2}BEsin\varphi\, t$$

(5)

Η (5) είναι γραμμική δεύτερης τάξης, μη ομογενής, και έχει μια μερική λύση της μορφής z= at. Αντικαθιστώντας στην (5) έχουμε:

$$a = \frac{Esin\varphi}{B}$$

(6)

Η ομογενής είναι:

$$\ddot{z} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 z = 0$$

(7)

Με ομογενή λύση την:

$$z(o\mu) = A\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + Bcos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

(8)

Έτσι η γενική λύση είναι σύμφωνα με την (6) και (8):

$$z = Asin\left(\frac{qB}{m}t\right) + Bcos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{Esin\varphi}{B}t$$

(9)

Εφόσον το σωματίδιο είναι αρχικά (όπως έχουμε θεωρήσει) στην θέση z=0, είναι B=0. Οπότε:

$$z = Asin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{Esin\varphi}{B}t$$

(10)

Παραγωγίζουμε:

$$\dot{z} = \frac{qBA}{m}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{Esin\varphi}{B}$$

(11)

Η αρχική ταχύτητα είναι επίσης μηδενική, οπότε από την σχέση (11) βρίσκουμε το Α, και άρα οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$z = \frac{Esin\varphi}{B}\left(t - \frac{m}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)$$

$$\dot{z} = \frac{Esin\varphi}{B}\left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)$$

(12)

Έστω ότι την Ε=Β=1 και φ=30 μοίρες και q=m. Τότε έχουμε:

$$z = \frac{1}{2}(t - sint)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(1 - cost)$$

(13)

Οπότε την στιγμή t=π/2 sec, έχουμε:

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0{,}285\ m$$

$$\dot{z} = 0{,}5\,\frac{m}{s}$$

(14)

Οπότε την στιγμή t=1 sec το σωματίδιο θα έχει ανέλθει κατά 0,285 m και ο ρυθμός που θα ανεβαίνει είναι 0,5m/s