Κυκλική στεφάνη και δύο κυλιόμενοι δίσκοι

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
23-5-2021

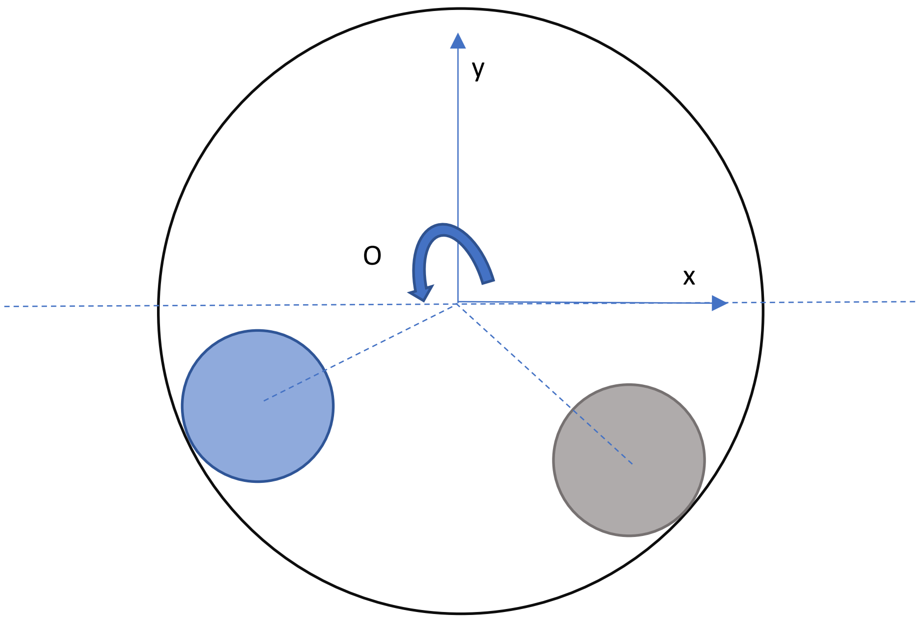
Έστω μια κυκλική στεφάνη ακτίνας R και μάζας M=m, που μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Ο. Εντός της στεφάνης, βάζουμε δύο ίδιους δίσκους, ακτίνας r και μάζας m ο καθένας (κάτω από την οριζόντια διάμετρο). Αφήνουμε τους δίσκους να κινηθούν – και οι δύο δίσκοι, κυλιόνται χωρίς να ολισθαίνουν ως προς την στεφάνη.

α. Αν κάποια στιγμή ο ένας δίσκος βρίσκεται σε θέση με γωνία θ_1 (όπου $\pi<\theta_1<2\pi$), τότε ποια σχέση συνδέει τις μεταφορικές επιταχύνσεις των δύο δίσκων την στιγμή εκείνη?

β. Κάποια στιγμή οι δίσκοι συγκρούονται. Αν αυτό συμβαίνει σε θέση με γωνία φ ($\pi<\varphi<2\pi$), τότε ποια είναι η μεταφορική επιτάχυνση κάθε δίσκου την στιγμή της σύγκρουσης?

γ. Όταν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας και των δύο δίσκων είναι ίσες με υ, τότε ποια σχέση συνδέει τις θέσεις των δύο δίσκων ?

Οι γωνίες μετριούνται αντίθετα των δεικτών του ρολογιού, με τη φορά του βέλους του σχήματος, και με μηδενική γωνία πάνω στον άξονα x.



Κάθε δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ως προς την στεφάνη, οπότε το σημείο επαφής κάθε δίσκου με την στεφάνη, πρέπει να έχει μηδενική σχετική ταχύτητα. Έτσι, αν υ_1 και υ_2

είναι οι ταχύτητες των κέντρων μάζας του δίσκου 1 και 2, και ω_1 και ω_2 οι γωνιακές ταχύτητες, ενώ Ω η γωνιακή ταχύτητα της στεφάνης, θα πρέπει να ισχύει:

$$\upsilon_1 + \omega_1 r = \upsilon_2 + \omega_2 r = \Omega R$$

(1)

Αν Τ1 και Τ2 είναι οι τριβές που ασκούνται σε κάθε δίσκο, πρέπει από τον στροφικό νόμο να έχουμε ότι:

$$T1 + T2 = \frac{1}{2} m r \dot{\omega}_1 + \frac{1}{2} m r \dot{\omega}_2$$

(2)

Όμως, λόγω δράσης – αντίδρασης, η στεφάνη θα δέχεται τις αντίθετες των τριβών Τ1 και Τ2, και άρα στροφικά για την στεφάνη θα ισχύει:

$$-(T1 + T2) = M R \dot{\Omega} = m R \dot{\Omega}$$

(3)

Συνδυάζοντας την (2) και (3), και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι αρχικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές (αφού οι δίσκοι αφήνονται) προκύπτει ότι:

$$\Omega R = -\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) r$$

(4)

Έτσι αντικαθιστώντας την σχέση (4) στην τελευταία ισότητα της σχέσης (1), παίρνουμε:

$$\frac{3}{2}\omega_2 r = -\upsilon_2 - \frac{1}{2}\omega_1 r$$

(5)

Και τελικά, βάζοντας την σχέση (5) στην πρώτη ισότητα της σχέσης (1) παίρνουμε:

$$\frac{3}{2}\upsilon_1 + \frac{3}{2}\omega_1 r - \frac{3}{2}\upsilon_2 = -\upsilon_2 - \frac{1}{2}\omega_1 r \Longrightarrow 2\omega_1 r = \frac{1}{2}\upsilon_2 - \frac{3}{2}\upsilon_1$$

(6)

Άρα τελικά:

$$\omega_1 r = \frac{\upsilon_2 - 3\upsilon_1}{4}$$

(7)

Και λόγω συμμετρίας:

$$\omega_2 r = \frac{\upsilon_1 - 3\upsilon_2}{4}$$

(8)

Και αντικαθιστώντας στην (4) παίρνουμε:

$$\Omega R = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{4}$$

(9)

Η κινητική ενέργεια λοιπόν του συστήματος σύμφωνα με τις πάνω σχέσεις, θα είναι:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{4}m(\omega_1 r)^2 + \frac{1}{4}m(\omega_2 r)^2 + \frac{1}{2}m(\Omega R)^2$$

$$K = \frac{27}{32}m\upsilon_1^2 + \frac{27}{32}m\upsilon_2^2 - \frac{5}{16}m\upsilon_1\upsilon_2$$

(10)

Ισχύει όμως ότι αν θ_1 και θ_2 οι γωνιακές θέσεις των δίσκων 1 και 2, τότε προφανώς για τις ταχύτητες των κέντρων μάζας θα έχουμε:

$$\upsilon_1 = \dot{\theta}_1(R-r) \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_2 = \dot{\theta}_2(R-r)$$

(11)

Οπότε η συνάρτηση Lagrange του συστήματος γράφεται τώρα:

$$L = \frac{27}{32}m\dot{\theta}_1^2(R-r)^2 + \frac{27}{32}m\dot{\theta}_2^2(R-r)^2 - \frac{5}{16}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(R-r)^2 - mg(R-r)(sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

(12)

Για κάθε γενικευμένη συντεταγμένη θ_1 και θ_2 έχουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange, οι οποίες δίνουν :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \Rightarrow \frac{27}{16}(R-r)\ddot{\theta}_1 - \frac{5}{16}(R-r)\ddot{\theta}_2 = -gcos\theta_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \Rightarrow \frac{27}{16}(R-r)\ddot{\theta}_2 - \frac{5}{16}(R-r)\ddot{\theta}_1 = -gcos\theta_2$$

(14)

Οπότε τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα, ως εξής:

α. Αν πάρουμε την πρώτη διαφορική του συστήματος, τότε αυτή γράφεται :

$$\frac{27}{16}\alpha_1 - \frac{5}{16}\alpha_2 = -gcos\theta_1$$

β. Όταν οι δίσκοι συγκρούονται, είναι $\theta_1 = \theta_2 = \varphi$, οπότε αν αφαιρέσουμε τις δύο διαφορικές του συστήματος (14), παίρνουμε:

$$2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

γ. Το σύστημα μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως εξής:

$$27\ddot{\theta}_1 - 5\ddot{\theta}_2 = -\frac{16g}{R-r}cos\theta_1$$

$$27\ddot{\theta}_2 - 5\ddot{\theta}_1 = -\frac{16g}{R-r}cos\theta_2$$

(15)

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με το $\dot{\theta}_1$ και την δεύτερη με το $\dot{\theta}_2$ και τις ολοκληρώνουμε ώστε να πάρουμε:

$$\frac{27}{2}\dot{\theta}_1^2 - 5\int \dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2\, dt = -\frac{16g}{R-r} sin\theta_1 + c_1$$

$$\frac{27}{2}\dot{\theta}_1^2 - 5\int \dot{\theta}_2\,\ddot{\theta}_1 dt = -\frac{16g}{R-r} sin\theta_2 + c_2$$

(16)

Προσθέτουμε τις διαφορικές και με κατά παράγοντες έχουμε:

$$\frac{27}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{27}{2}\dot{\theta}_2^2 - 5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 = -\frac{16g}{R-r} sin\theta_1 - \frac{16g}{R-r} sin\theta_2 + c$$

(17)

Όταν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας είναι ίσες με υ, τότε έχουμε:

$$\frac{27}{2}\frac{\upsilon^2}{(R-r)^2} + \frac{27}{2}\frac{\upsilon^2}{(R-r)^2} - 5\frac{\upsilon^2}{(R-r)^2} = \frac{22\upsilon^2}{(R-r)^2} = -\frac{16g}{R-r}(sin\theta_1 + sin\theta_2) + c$$

(18)

Όπου η σταθερά c καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Εφόσον αρχικά αφήνονται οι δίσκοι, έχουν μηδενικές ταχύτητες. Οπότε αν αφήνονται σε γωνίες φ_1 και φ_2, τότε στην θέση σύγκρουσης, οι γωνιακές τους θέσεις ικανοποιούν την σχέση :

$$sin\theta_1 + sin\theta_2 = \frac{22\upsilon^2}{16g(R-r)} - (sin\varphi_1 + sin\varphi_2)$$

(19)