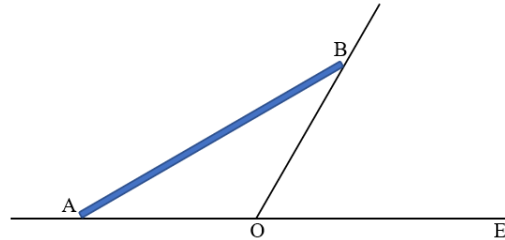


**ΘΕΜΑ 1ο**

Στις ερωτήσεις 1-5 να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

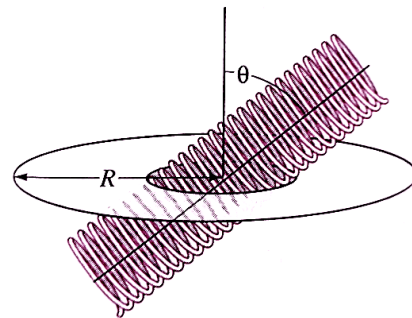
1. Στο στιγμιότυπο του διπλανού σχήματος, το άκρο A της ράβδου έχει ταχύτητα μέτρου  $v$  προς τα αριστερά, και η ράβδος σχηματίζει με τον οδηγό (πάνω στον οποίον κινούνται τα άκρα της) γωνίες  $\widehat{BAO} = 30^\circ$  και  $\widehat{BOE} = 60^\circ$ . Αν το μήκος της ράβδου είναι  $L$ , ποια είναι (κατά μέτρο) η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου κατά την προαναφερθείσα χρονική στιγμή;



- α. Είναι ίση προς  $v / 2L$ .
- β. Είναι ίση προς  $v / L$ .
- γ. Είναι ίση προς  $v\sqrt{3} / 2L$ .
- δ. Είναι ίση προς  $2v / L$ .

**Μονάδες 5**

2. Το μακρύ πυκνοτυλιγμένο σωληνοειδές του διπλανού σχήματος συνίσταται από  $n$  σπείρες ανά μονάδα μήκους, η καθεμιά ακτίνας  $r$ , ενώ το κυκλικό αγωγίδιο δαχτυλίδι έχει ακτίνα  $R$  ( $R > r$ ) και αντίσταση ανά μονάδα μήκους ίση προς  $\lambda$  (σε  $\Omega/m$ ). Το κέντρο του δαχτυλιδιού βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του σωληνοειδούς, ο οποίος σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα συμμετρίας του δαχτυλιδιού. Αν το σωληνοειδές διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα χαμηλής συχνότητας,  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$  (S.I.), ποιο είναι το επαγωγικό ρεύμα που εμφανίζεται στο δαχτυλίδι;



- α. Είναι ίσο προς  $I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mu_0 n I_0 R \omega \sin \theta}{2\lambda} \eta \mu(\omega t)$ .

β. Είναι ίσο προς  $I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mu_0 n I_0 (R^2 - r^2) \omega \sigma \nu \nu \theta}{2\lambda R} \eta\mu(\omega t)$ .

γ. Είναι ίσο προς  $I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mu_0 n I_0 r^2 \omega}{2\lambda R} \eta\mu(\omega t)$ .

δ. Είναι ίσο προς  $I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mu_0 n I_0 r^2 \omega \sigma \nu \nu \theta}{2\lambda R} \eta\mu(\omega t)$ .

### Μονάδες 5

3. Όταν ένα εναλλασσόμενο ρεύμα έντασης  $i_1(t) = I_{01} \eta\mu(\omega t)$  (S.I.) διαβιβαστεί σε αγωγό ηλεκτρικής αντίστασης  $R$ , διαπιστώνεται ότι σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$  αναπτύσσεται ένα ποσό θερμότητας ίσο προς  $Q_1$ . Περαιτέρω, όταν ένα δεύτερο εναλλασσόμενο ρεύμα έντασης  $i_2(t) = I_{02} \eta\mu(\omega t + \phi)$  (S.I.) διαβιβαστεί στον ίδιο αγωγό, διαπιστώνεται ότι στο ίδιο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  αναπτύσσεται ένα ποσό θερμότητας ίσο προς  $Q_2$ . Αν στον παραπάνω αγωγό διαβιβαστούν ταυτόχρονα τα δύο προαναφερθέντα εναλλασσόμενα ρεύματα, ποιο είναι το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$ ;

α. Είναι ίσο προς  $Q = Q_1 + Q_2$ .

β. Είναι ίσο προς  $Q = Q_1 + Q_2 + 2\sqrt{Q_1 Q_2}$ .

γ. Είναι ίσο προς  $Q = Q_1 + Q_2 + \sqrt{2Q_1 Q_2} \sigma \nu \nu \phi$ .

δ. Είναι ίσο προς  $Q = Q_1 + Q_2 + 2\sqrt{Q_1 Q_2} \sigma \nu \nu \phi$ .

### Μονάδες 5

4. Ένα σωματίδιο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στη μία διάσταση. Έστω  $x = 0$  η θέση ισορροπίας του σωματιδίου, και είναι επίσης γνωστό ότι η κίνηση του σωματιδίου ξεκινάει από τη θέση ισορροπίας του κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0$  χωρίς αρχική φάση. Κάνουμε τρεις καταγραφές της θέσης του σωματιδίου (ως προς τη θέση ισορροπίας του)  $x_1, x_2, x_3$  κατά τις χρονικές στιγμές  $t_1 \neq 0$ ,  $t_2 = t_1 + 1$  και  $t_3 = t_2 + 1$  (σε sec) αντιστοίχως. Ποια είναι η περίοδος της αρμονικής κίνησης του σωματιδίου;

α. Είναι ίση προς  $T = \frac{2\pi}{\sigma \nu \nu^{-1} \left( \frac{2(x_1 + x_3)}{x_2} \right)}$ .

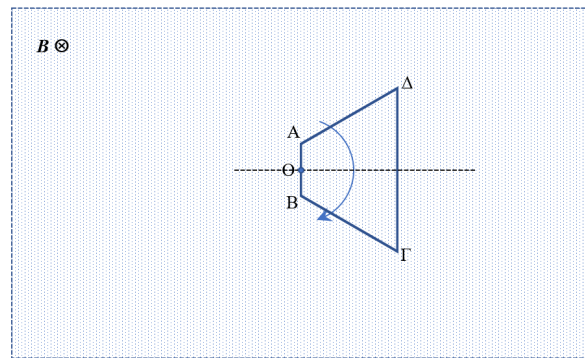
β. Είναι ίση προς  $T = \frac{2\pi}{\sigma\upsilon\nu^{-1}\left(\frac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)}$ .

γ. Είναι ίση προς  $T = \frac{2\pi}{\sigma\upsilon\nu^{-1}\left(\frac{2x_2}{x_1 + x_3}\right)}$ .

δ. Είναι ίση προς  $T = \frac{2\pi}{\sigma\upsilon\nu^{-1}\left(\frac{x_2}{2(x_1 + x_3)}\right)}$ .

### Μονάδες 5

5. Στη διάταξη του διπλανού σχήματος το ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  έχει φορά προς τα μέσα (κάθετα στο επίπεδο του σχήματος). Το ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι αγώγιμο και μπορεί να περιστρέφεται περί ακλόνητο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το μέσον  $O$  της πλευράς  $AB$ , και είναι κάθετος στο επίπεδο του τραπέζιου (που συμπίπτει με το επίπεδο του σχήματος). Δίνονται για το τραπέζιο ότι  $(A\Delta) = (B\Gamma) = 2\ell$ ,  $(AB) = \ell$  και  $(\Gamma\Delta) = 3\ell$ . Κάποια στιγμή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τραπέζιου (περί το  $O$ ) έχει μέτρο ίσο προς  $\omega$ , με τη φορά περιστροφής που δείχνεται στο σχήμα. Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι λανθασμένη κατά την προαναφερθείσα χρονική στιγμή;



- α. Ισχύει ότι  $V_A - V_B = 0$ .
- β. Ισχύει ότι  $V_\Delta - V_A = 20(V_B - V_O)$ .
- γ. Ισχύει ότι  $V_\Delta - V_O = \frac{21}{20}(V_\Delta - V_A)$ .
- δ. Ισχύει ότι  $V_\Gamma - V_O = 20(V_A - V_O)$ .

### Μονάδες 5

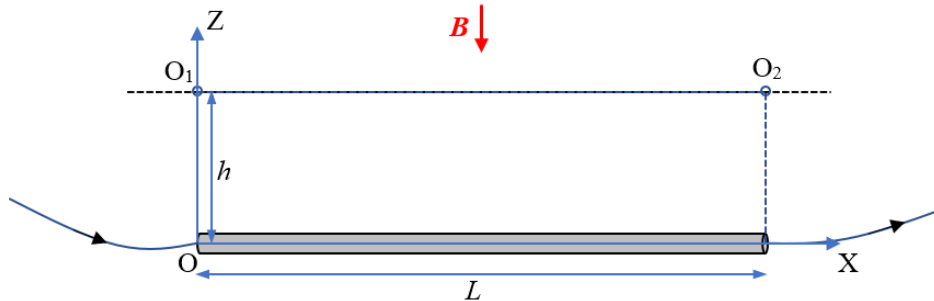
## ΘΕΜΑ 2ο

1. Στις ερωτήσεις που ακολουθούν, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στην παρακάτω διάταξη, ο ομογενής κυλινδρικός μεταλλικός αγωγός διατομής  $S$  και μήκους  $L$  ισορροπεί παράλληλα με τον οριζόντιο άξονα  $O_1O_2$  όταν δεν διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Στον γύρω χώρο υπάρχει χωρικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο ίσο προς

$$\vec{B}(x) = -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \hat{z} \quad (\text{T}).$$
 Ο αγωγός είναι αναρτημένος στον οριζόντιο άξονα  $O_1O_2$  με

τη βοήθεια μονωτικών νημάτων μήκους  $h$ , και κατά την ισορροπία τα νήματα είναι κατακόρυφα και παράλληλα στον άξονα  $OZ$ , ενώ ο άξονας συμμετρίας του αγωγού κείται πάνω στον άξονα  $OX$  (που είναι παράλληλος προς τον οριζόντιο άξονα  $O_1O_2$ ).



Ο αγωγός στα άκρα του συνδέεται με εξωτερικό κύκλωμα, οπότε όταν διαβιβαστεί ένα συνεχές ρεύμα έντασης  $I$  (με τη φορά των μαύρων βελών του σχήματος) διαπιστώνεται ότι σχηματίζει ορισμένη γωνία με το κατακόρυφο επίπεδο  $XOZ$  του σχήματος. Δίνεται η πυκνότητα του υλικού του αγωγού  $\rho$  ( $\text{Kg/m}^3$ ) και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ . Παντός είδους τριβές στα σημεία ανάρτησης του αγωγού θεωρούνται αμελητέες.

- 1.A Ποια είναι γωνία  $\phi_0$  που σχηματίζει, το επίπεδο που ορίζει ο αγωγός και τα νήματα, με το επίπεδο  $OXZ$ , όταν διαβιβαστεί συνεχές ρεύμα έντασης  $I$ ; Τα σύρματα του εξωτερικού κυκλώματος που συνδέονται στα άκρα του αγωγού να θεωρηθεί ότι είναι αμελητέας μάζας, αμελητέας αντίστασης και πλήρως εύκαμπτα.

α.  $\varepsilon\phi(\phi_0) = \frac{B_0 I}{\rho S g}$

β.  $\varepsilon\phi(\phi_0) = \frac{B_0 I}{2\rho S g}$

γ.  $\varepsilon\phi(\phi_0) = \frac{2B_0 I}{\rho S g}$

Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

- 1.B** Αν διακοπεί το συνεχές ρεύμα, πώς μεταβάλλεται η επαγωγική τάση στα άκρα του αγωγού συναρτήσει της γωνίας  $\phi$  που σχηματίζουν τα νήματα ανάρτησης με το επίπεδο OXZ;

**α.**  $\mathcal{E} = B_0 L \sqrt{gh} \cos \phi \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}$

**β.**  $\mathcal{E} = B_0 L \sqrt{2gh} \cos \phi \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}$

**γ.**  $\mathcal{E} = B_0 L \sqrt{\frac{gh}{2}} \cos \phi \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}$

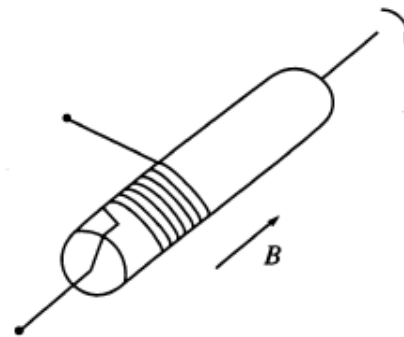
**Μονάδες 2**

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

- 2.** Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στη διάταξη του διπλανού σχήματος, ένα μεταλλικό σύρμα είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια (παράπλευρη επιφάνεια) ξύλινου κυλίνδρου ακτίνας R. Το ένα άκρο του σύρματος καταλήγει στον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου (όπως φαίνεται στο σχήμα), ενώ το άλλο άκρο του αναδύεται εφαπτομενικά της περιφέρειας του κυλίνδρου (όπως φαίνεται στο σχήμα). Ο κύλινδρος βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B με τον άξονά του παράλληλο προς τις γραμμές της μαγνητικής επαγωγής. Ο κύλινδρος τίθεται σε περιστροφή περί τον κύριο άξονα συμμετρίας του (με τη φορά περιστροφής που φαίνεται στο σχήμα). Αν ο κύλινδρος εκτελεί N περιστροφές το δευτερόλεπτο, ποια διαφορά δυναμικού επάγεται μεταξύ των δύο άκρων του σύρματος;

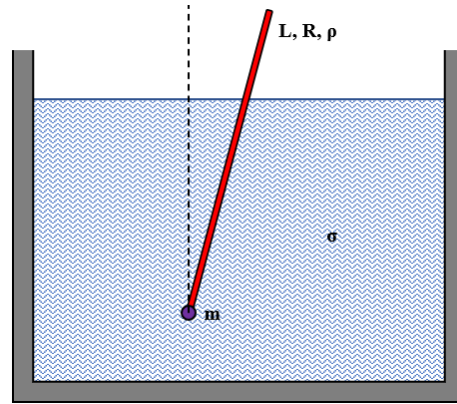


- α.** Η επαγόμενη διαφορά δυναμικού είναι μηδενική.  
**β.** Η επαγόμενη διαφορά δυναμικού είναι ίση προς  $\pi NBR^2$ .  
**γ.** Η επαγόμενη διαφορά δυναμικού είναι ίση προς  $2\pi NBR^2$ .  
**δ.** Η επαγόμενη διαφορά δυναμικού δεν μπορεί να υπολογιστεί από τα δεδομένα της άσκησης.

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

3. Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία ξύλινη κυλινδρική ράβδος μήκους  $L$ , διατομής ακτίνας  $R$ , και πυκνότητας  $\rho$ , φέρει προσκολλημένο στο ένα άκρο της μεταλλικό σφαιρίδιο (αμελητέου όγκου). Το παραπάνω σύστημα επιπλέει μέσα σε υγρό πυκνότητας  $\sigma$  ( $\sigma > \rho$ ), όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω  $m$  η μάζα του μεταλλικού σφαιριδίου και  $s$  το τμήμα της ράβδου που είναι βυθισμένο μέσα στο υγρό (τα  $m$  και  $s$  δεν είναι δεδομένα της άσκησης!). Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστή:

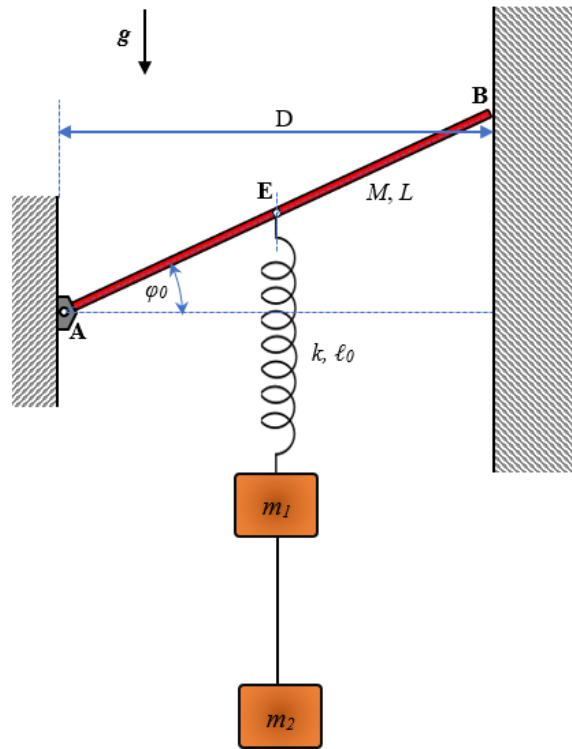


- α. Το βυθισμένο τμήμα της ράβδου έχει μήκος  $s$  ανάλογο του λόγου των δύο δοθέντων πυκνοτήτων  $\rho/\sigma$ .
- β. Εάν ισχύει ότι  $\sigma = 4\rho$ , τότε το παραπάνω σύστημα ισορροπεί ως περιγράφηκε όταν η μάζα του σφαιριδίου είναι ίση με το μισό της μάζας της ράβδου.
- γ. Το μήκος  $s$  του βυθισμένου τμήματος της ράβδου αυξάνεται αν αντικαταστήσω το σφαιρίδιο μάζας  $m$  με άλλο σφαιρίδιο διπλάσιας μάζας.
- δ. Η ισορροπία του συστήματος είναι ευσταθής γιατί η δύναμη της άνωσης ασκείται στη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος.

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

### ΘΕΜΑ 3ο

Στη διάταξη του διπλανού σχήματος η δοκός AB μάζας  $M$  και μήκους  $L$  μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα περιστροφής περί το άκρο A, και θεωρείται ομογενής και ισοπαχής. Στη θέση του κέντρου μάζας E της δοκού είναι αναρτημένο αβαρές ιδανικό ελατήριο σταθερής επαναφοράς  $k$  και φυσικού μήκους  $\ell_0$ , στο κατώτερο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένα τα σώματα με μάζες  $m_1$  και  $m_2$  του σχήματος. Τα δύο τελευταία σώματα συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Το πάνω άκρο του ελατηρίου που συνδέεται με το κέντρο μάζας της δοκού έχει τη δυνατότητα να γλιστράει χωρίς τριβές περί τη θέση ανάρτησης E έτσι ώστε το ελατήριο να διατηρείται κατακόρυφο. Στα δεξιά υπάρχει λείο κατακόρυφο τοίχωμα το οποίο απέχει απόσταση ίση προς  $D$  ( $D < L$ ) από το κατακόρυφο τοίχωμα στο οποίο είναι αρθρωμένη η δοκός στο σημείο A. Το όλο σύστημα αρχικώς βρίσκεται σε ισορροπία. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ .



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον.

- A. Να υπολογίσετε την δύναμη επαφής που δέχεται η δοκός από το τοίχωμα με το όλο σύστημα να βρίσκεται σε ισορροπία. Ποια γωνία σχηματίζει η δύναμη άρθρωσης με τη διεύθυνση της δοκού;

**Μονάδες 7**

- B. Να υπολογίσετε ένα άνω όριο για την τιμή της μάζας  $m_2$  που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παραπάνω διάταξη, έτσι ώστε όταν το νήμα κοπεί και το σώμα μάζας  $m_1$  τεθεί σε κίνηση να μην λαμβάνει χώρα ανασήκωση της δοκού. Να δικαιολογήσετε όσο πιο αναλυτικά γίνεται την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

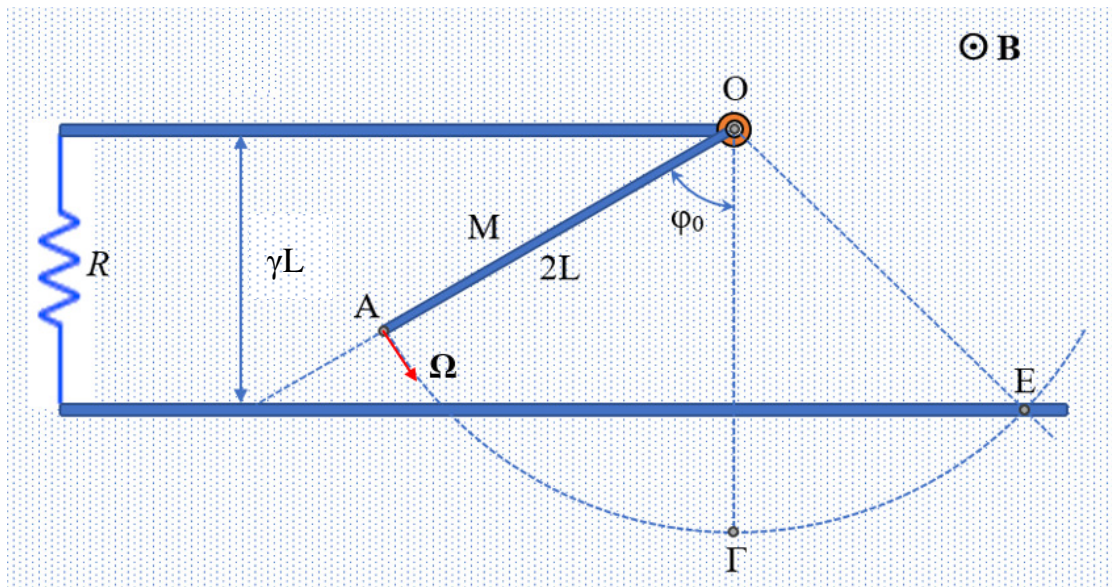
- Γ. Ανασηκώνουμε τη μάζα  $m_2$  κατακόρυφα ώστε να μηδενιστεί η τάση του νήματος και το υπόλοιπο σύστημα να περιέλθει σε ισορροπία περί την υψηλότερη θέση ισορροπίας, και την φέρνουμε ακριβώς κάτω από την μάζα  $m_1$ . Κατόπιν αφήνουμε την όλη διάταξη ε-

λεύθερη. Αν είναι γνωστό το μήκος του νήματος  $s$  ( $s < \frac{m_2 g}{k}$ ), να υπολογίσετε την μέγιστη δυνατή δύναμη που δέχεται η δοκός από την άρθρωση, καθώς και την μέγιστη δυνατή δύναμη που δέχεται απ' το τοίχωμα.

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 4ο**

Στη διάταξη του παρακάτω σχήματος, η αγώγιμη ομογενής ράβδος OA έχει μήκος  $2L$ , μάζα  $M$  και ωμική αντίσταση ανά μονάδα μήκους  $\lambda$ , και μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο περί την αγώγιμη άρθρωση O χωρίς τριβές. Η ανωτέρω ράβδος μπορεί επίσης να γλιστράει χωρίς τριβές επί οριζόντιου αγώγιμου οδηγού, περιστρεφόμενη περί την άρθρωση O. Οι δύο οριζόντιοι αγώγιμοι οδηγοί απέχουν κατά  $\gamma L$  ( $0 < \gamma < 2$ ) και έχουν αμελητέα ωμική αντίσταση, όμως, μεταξύ τους εμφανίζεται ωμική αντίσταση ίση προς  $R$ . Η όλη διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης  $B$  με τη φορά του σχήματος (φορά προς τα πάνω ως προς το επίπεδο της διάταξης)



Αρχικά η όλη διάταξη ισορροπεί έτσι ώστε η ράβδος να σχηματίζει ορισμένη γωνία  $\phi_0 > \arccos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$  με την κάθετο OΓ στους δύο οδηγούς που διέρχεται από τη θέση της άρθρωσης O, ευρισκόμενη μεταξύ των δύο οδηγών. Κάποια χρονική στιγμή ( $t = 0$ ) η ράβδος δέχεται ώθηση στο άκρο της A, κάθετα στον κύριο άξονά της και εντός του επιπέδου κίνησής της, και περαιτέρω, διαπιστώνεται ότι ακινητοποιείται όταν εγκαταλείπει οριακά τον οδηγό επί του οποίου βαίνει στο σημείο E.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον. Δίνεται: Η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα περιστροφής διερχόμενο από το κέντρο μάζας της  $I_{CM} = 1/12 ML^2$ .

**A.** Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ώθησης  $\Omega$  που δόθηκε στη ράβδο.

**Μονάδες 11**

**B.** Αγνοώντας την ωμική αντίσταση της ράβδου ( $\lambda L \rightarrow 0$ ), να υπολογίσετε τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση  $O$  κατά τη στιγμή που συναντά κάθετα τον οδηγό επί του οποίου βαίνει. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης άρθρωσης κατά την προαναφερθείσα χρονική στιγμή;

**Μονάδες 8**

**Γ.** Αγνοώντας την ωμική αντίσταση της ράβδου ( $\lambda L \rightarrow 0$ ) και πάλι, να υπολογίσετε την ισχύ της δύναμης Laplace καθώς και την ισχύ των απωλειών λόγω φαινομένου Joule κατά τη στιγμή που η ράβδος συναντά κάθετα τον οδηγό επί του οποίου βαίνει.

**Μονάδες 6**

Υπόδειξη: Αν τυχόν εμφανιστούν περίπλοκα ολοκληρώματα κατά τους υπολογισμούς σας δεν χρειάζεται να γίνει ο υπολογισμός του ολοκληρώματος, αρκεί να γραφεί το ολοκλήρωμα σε αδιάστατη μορφή. Σημειώνεται ότι κατά την επαφή της ράβδου με τον οριζόντιο αγωγίμο οδηγό η ράβδος απλά «πατάει» πάνω στον οδηγό.

**ΤΕΛΟΣ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ**

**8<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
Αντικείμενο εξέτασης: Όλη η νέα διδακτέα ύλη  
**Αναλυτικές απαντήσεις των ασκήσεων**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

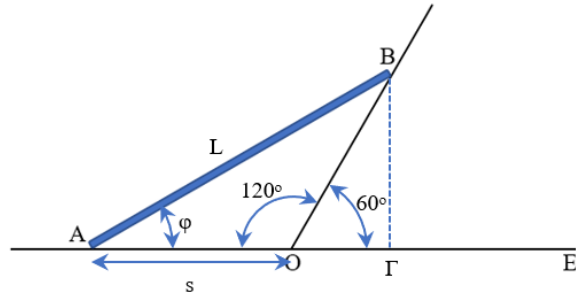
**1. (β)**

**Αιτιολόγηση:** Από το διπλανό σχήμα έχουμε ότι

$$\sin \phi = (B\Gamma) / (AB) \Rightarrow (B\Gamma) = L \sin \phi$$

$$\sin 60^\circ = (B\Gamma) / (OB) \Rightarrow (B\Gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2} (OB)$$

επομένως  $(OB) = \frac{2}{\sqrt{3}} L \sin \phi$ . Όμως από



τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο AOB περαιτέρω έχουμε ότι

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB) \cos 120^\circ \Rightarrow$$

$$L^2 = s^2 + \frac{4}{3} L^2 \sin^2 \phi - 2s \frac{2}{\sqrt{3}} L \sin \phi \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$s^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} L \sin \phi\right) s + L^2 \left(\frac{4}{3} \sin^2 \phi - 1\right) = 0$$

Λύνοντας το παραπάνω τριώνυμο ως προς  $s$  η φυσικώς αποδεκτή λύση είναι η

$$s = L \left( \cos \phi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \phi \right)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς τον χρόνο βρίσκουμε ότι

$$\frac{ds}{dt} = L \left( -\sin \phi - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \phi \right) \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow v_A = -L \left( \sin \phi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \phi \right) \dot{\phi}, \quad \dot{\phi} < 0$$

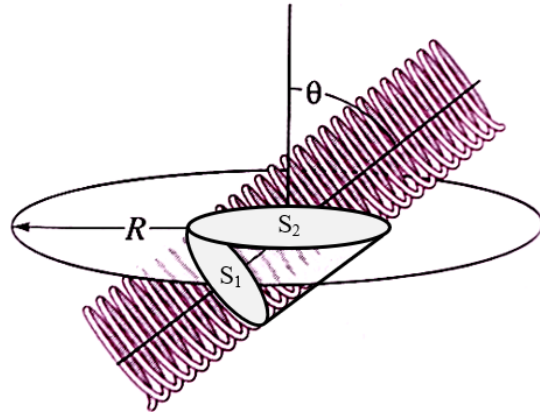
Κατά το στιγμιότυπο της άσκησης είναι  $\phi = 30^\circ$ , οπότε εκ της τελευταίας σχέσης είναι

$$v = -L \left( \sin 30^\circ + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 30^\circ \right) \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{v/L}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2}} = -\frac{v}{L}$$

Οπότε είναι  $|\dot{\phi}| = v/L$  και η σωστή απάντηση είναι η (β).

## 2. (δ)

**Αιτιολόγηση:** Εφόσον έχουμε μακρύ πυκνοτυλιγμένο σωληνοειδές, το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι ομογενές με ένταση ίση προς  $B = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t)$  (επειδή έχουμε εναλλασσόμενο ρεύμα χαμηλής συχνότητας είμαστε στην περιοχή της ημιστατικής), ενώ στο εξωτερικό του το μαγνητικό πεδίο είναι παντού μηδέν. Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές του πεδίου στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι παράλληλες προς τον άξονα του σωληνοειδούς, δηλαδή σχηματίζουν γωνία  $\theta$  με τον άξονα συμμετρίας του δαχτυλιδιού. Αν θεωρήσουμε την κλειστή επιφάνεια  $S$  που συνίσταται από τους κυκλικούς δίσκους  $S_1$  και  $S_2$  του σχήματος, και την παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια  $S_\pi$  του σωληνοειδούς, τότε η μαγνητική ροή διαμέσου της επιφάνειας  $S$  είναι ίση προς μηδέν, δηλαδή



$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \underbrace{\Phi_{S_\pi}}_{=0} = 0 \Rightarrow \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0 \Rightarrow \Phi_{S_2} = -\Phi_{S_1}$$

όμως  $\Phi_{S_1} = -\pi r^2 \mu_0 n I_0 \cos(\omega t)$ , συνεπώς  $\Phi_{S_2} = \pi r^2 \mu_0 n I_0 \cos(\omega t)$ . Η τελευταία μαγνητική ροή όμως είναι παράλληλη προς τον άξονα του σωληνοειδούς, και μόνο ένα τμήμα της ίσο προς  $\Phi_{S_2}^\perp = \Phi_{S_2} \cos \theta = \mu_0 n I_0 \pi r^2 \cos \theta \cos(\omega t)$  διαπερνά εγκάρσια την διατομή του δαχτυλιδιού και είναι και αυτό που μας ενδιαφέρει (η υπόλοιπη μαγνητική ροή δεν διατρύπη τη διατομή του δαχτυλιδιού!). Εφόσον η προαναφερθείσα ροή είναι χρονομεταβαλλόμενη εμφανίζεται επαγωγική ΗΕΔ ίση προς

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{S_2}^\perp}{dt} = \mu_0 n I_0 \pi r^2 \omega \cos \theta \sin(\omega t)$$

οπότε το επαγωγικό ρεύμα στο δαχτυλίδι βρίσκεται ως

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R\lambda} = \frac{\mu_0 n I_0 \pi r^2 \omega \cos \theta \sin(\omega t)}{2\pi R\lambda} = \frac{\mu_0 n I_0 r^2 \omega \cos \theta}{2R\lambda} \sin(\omega t)$$

οπότε η σωστή απάντηση είναι η (δ).

## 3. (δ)

**Αιτιολόγηση:** Η μέση ισχύς που αναπτύσσεται στον αντιστάτη λόγω του εναλλασσόμενου ρεύματος  $i_1(t) = I_{01} \sin(\omega t)$  είναι ίση με  $\bar{P}_1 = \frac{Q_1}{\Delta t} = \frac{I_{01}^2}{2} R$ . Η μέση ισχύς που αναπτύσσεται στον ίδιο αντιστάτη λόγω του εναλλασσόμενου ρεύματος  $i_2(t) = I_{02} \sin(\omega t + \phi)$  είναι ίση

με  $\bar{P}_2 = \frac{Q_2}{\Delta t} = \frac{I_{02}^2}{2} R$ . Όταν τα δύο εναλλασσόμενα ρεύματα διαβιβάζονται ταυτόχρονα τότε το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$  έχει πλάτος ίσο προς (παραστείτε το ρεύμα  $i_1(t)$  ως ένα διάνυσμα με μέτρο  $I_{01}$  και το ρεύμα  $i_2(t)$  ως ένα διάνυσμα με μέτρο  $I_{02}$ , με το δεύτερο διάνυσμα να σχηματίζει γωνία  $\phi$  με το πρώτο ... όπως ακριβώς θα κάναμε σε μια σύνθεση ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας)

$$I_0 = \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos \phi}$$

Οπότε η μέση ισχύς που αναπτύσσεται στον αντιστάτη είναι τώρα

$$\bar{P} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} (I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos \phi) R \Rightarrow \frac{Q}{R\Delta t} = \frac{1}{2} I_{01}^2 + \frac{1}{2} I_{02}^2 + I_{01}I_{02} \cos \phi \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2} I_{01}^2 R\Delta t + \frac{1}{2} I_{02}^2 R\Delta t + R\Delta t I_{01}I_{02} \cos \phi \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2} 2 \frac{Q_1}{R\Delta t} R\Delta t + \frac{1}{2} 2 \frac{Q_2}{R\Delta t} R\Delta t + R\Delta t \sqrt{2 \frac{Q_1}{R\Delta t}} \sqrt{2 \frac{Q_2}{R\Delta t}} \cos \phi \Rightarrow$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + 2\sqrt{Q_1 Q_2} \cos \phi$$

οπότε η σωστή απάντηση είναι η (δ).

#### 4. (β)

**Αιτιολόγηση:** Από τα δεδομένα της άσκησης η εξίσωση της απομάκρυνσης του σωματιδίου έχει τη μορφή  $x(t) = A \sin(\omega t)$ . Επομένως κατά τις χρονικές στιγμές  $t_1, t_2, t_3$  είναι

$$x_1 = A \sin(\omega t_1),$$

$$x_2 = A \sin(\omega t_2) = A \sin(\omega t_1 + \omega) = A \sin(\omega t_1) \cos \omega + A \cos(\omega t_1) \sin \omega = \\ x_1 \cos \omega + A \cos(\omega t_1) \sin \omega$$

$$x_3 = A \sin(\omega t_3) = A \sin(\omega t_1 + 2\omega) = A \sin(\omega t_1) \cos(2\omega) + A \cos(\omega t_1) \sin(2\omega) = \\ x_1 \cos(2\omega) + A \cos(\omega t_1) \sin(2\omega) = x_1 \cos(2\omega) + 2A \cos(\omega t_1) \sin \omega \cos \omega$$

Πολλαπλασιάζοντας την μεσαία εξίσωση με  $2 \cos \omega$  και αφαιρώντας την από την τρίτη εξίσωση βρίσκουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \omega x_2 &= 2x_1 \cos^2 \omega + 2A \cos(\omega t_1) \sin \omega \cos \omega \\ x_3 &= x_1 \cos(2\omega) + 2A \cos(\omega t_1) \sin \omega \cos \omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cos \omega x_2 - x_3 = 2x_1 \cos^2 \omega - x_1 \cos(2\omega) \Rightarrow$$

$$2 \cos \omega x_2 - x_3 = x_1 \{2 \cos^2 \omega - \cos^2 \omega + \sin^2 \omega\} = x_1 \Rightarrow 2 \cos \omega x_2 = x_3 + x_1 \Rightarrow \cos \omega = \frac{x_1 + x_3}{2x_2} \Rightarrow$$

$$\omega = \cos^{-1} \left( \frac{x_1 + x_3}{2x_2} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \cos^{-1} \left( \frac{x_1 + x_3}{2x_2} \right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\cos^{-1} \left( \frac{x_1 + x_3}{2x_2} \right)}$$

κι έτσι η σωστή απάντηση είναι η (β).

### 5. (δ)

**Αιτιολόγηση:** Θα προχωρήσουμε εξετάζοντας τις προτάσεις μία προς μία ξεχωριστά μέχρι να πέσουμε στη λανθασμένη πρόταση ... .

(α) Εφόσον ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος (AB) σύμφωνα με τη θεωρία της επαγόμενης ΗΕΔ για στρεφόμενο αγωγό μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο ... η επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ του άκρου Α και του σημείου Ο είναι ίση με την επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ του άκρου Β και του σημείου Ο, δηλ.

$$V_A - V_O = V_B - V_O \Rightarrow V_A = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 0$$

άρα η πρόταση αυτή είναι αληθής.

(β) Από τα δεδομένα για το τραπέζιο με λίγη γεωμετρία είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι  $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta} = 60^\circ$ , οπότε ως εκ τούτου  $\widehat{B\Delta\Delta} = \widehat{A\Delta\Gamma} = 120^\circ$ . Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο  $\triangle O\Delta\Delta$  βρίσκουμε ότι

$$(O\Delta) = \sqrt{(A\Delta)^2 + (O\Delta)^2 - 2(A\Delta)(O\Delta) \cos 120^\circ} = \dots = \frac{\sqrt{21}}{2} \ell$$

Λόγω συμμετρίας προφανώς θα ισχύει ότι  $(O\Gamma) = (O\Delta)$ . Αν φανταστούμε το ευθύγραμμο τμήμα (OΔ) ως μια ράβδο που περιστρέφεται περί το άκρο της Ο, τότε η επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ των δύο άκρων της είναι (κατά τα γνωστά από τη θεωρία)

$$V_\Delta - V_O = \frac{1}{2} B\omega(O\Delta)^2 = \frac{1}{2} B\omega \frac{21}{4} \ell^2 = \frac{21}{8} B\omega \ell^2$$

Περαιτέρω, η επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ των σημείων Α και Ο είναι κατά τα γνωστά (αντιμετωπίζοντας το τμήμα (OΑ) ως μια ράβδο περιστρεφόμενη περί το άκρο της Ο) ίση προς

$$V_A - V_O = \frac{1}{2} B\omega(OA)^2 = \frac{1}{2} B\omega \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{8} B\omega \ell^2 = V_B - V_O$$

Επομένως είναι

$$\begin{aligned} V_{\Delta} - V_A &= V_{\Delta} - V_o + V_o - V_A = (V_{\Delta} - V_o) - (V_A - V_o) = \frac{21}{8} B\omega\ell^2 - \frac{1}{8} B\omega\ell^2 \\ &= \frac{20}{8} B\omega\ell^2 = 20 \frac{1}{8} B\omega\ell^2 = 20(V_B - V_o) \end{aligned}$$

οπότε και αυτή η πρόταση είναι αληθής.

(γ) Πιο πάνω βρήκαμε ότι  $V_{\Delta} - V_o = \frac{21}{8} B\omega\ell^2$  και επίσης ότι  $V_{\Delta} - V_A = \frac{20}{8} B\omega\ell^2$ , οπότε

είναι  $V_{\Delta} - V_o = \frac{21}{8} B\omega\ell^2 = \frac{21}{20} \frac{20}{8} B\omega\ell^2 = \frac{21}{20} (V_{\Delta} - V_A)$ , επομένως και αυτή η πρόταση είναι αληθής.

(δ) Λόγω του ότι  $(O\Gamma) = (O\Delta)$ , εύκολα διαπιστώνεται ότι  $V_{\Gamma} - V_o = V_{\Delta} - V_o = \frac{21}{8} B\omega\ell^2$ ,

οπότε

$$\left. \begin{aligned} V_{\Gamma} - V_o &= \frac{21}{8} B\omega\ell^2 \\ V_A - V_o &= \frac{1}{8} B\omega\ell^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_{\Gamma} - V_o}{V_A - V_o} = \frac{\frac{21}{8} B\omega\ell^2}{\frac{1}{8} B\omega\ell^2} = 21 \Rightarrow V_{\Gamma} - V_o = 21(V_A - V_o)$$

κι έτσι προκύπτει ότι η πρόταση αυτή είναι ψευδής, οπότε η σωστή απάντηση είναι η (δ).

## ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

**1.A** Επειδή έχουμε χωρικά μεταβαλλόμενο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ίσως σκεφτεί κανείς ότι χρειάζεται ολόκληρη διαδικασία για τον υπολογισμό της δύναμης Laplace στην περίπτωση που ο μεταλλικός αγωγός διαρρέεται από συνεχές ρεύμα ... όμως ας εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά τη μορφή του χωρομεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου ... . Το

δοθέν πεδίο  $\vec{B}(x) = -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \hat{z}$  έχει τα εξής χαρακτηριστικά επί του μήκους του

αγωγού:

(α) ισχύει ότι  $\vec{B}(x=0) = \vec{B}(x=L) = 0$ ,

(β) ισχύει ότι  $\vec{B}(x=L/2) = -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \hat{z} = -B_0 \hat{z}$  δηλαδή μεγιστοποιείται στο μέσον

του αγωγού,

(γ) ισχύει ότι

$$\vec{B}(x - \frac{L}{2}) = -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi(x - \frac{L}{2})}{L} \right) \hat{z} = -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi x}{L} - \frac{\pi}{2} \right) \hat{z} = -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{L} \right) \hat{z} = -B_0 \sigma \nu^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \hat{z}$$

$$\vec{B}(x + \frac{L}{2}) = -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi(x + \frac{L}{2})}{L} \right) \hat{z} = -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi x}{L} + \frac{\pi}{2} \right) \hat{z} = -B_0 \sigma \nu^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \hat{z} = \vec{B}(x - \frac{L}{2})$$

δηλαδή το πεδίο είναι συμμετρικό ως προς το μέσο του αγωγού.

Από τα (α), (β) και (γ) προκύπτει επομένως ότι κατά το μήκος του μεταλλικού αγωγού το μαγνητικό πεδίο είναι μέγιστο στο μέσο του και πέφτει συμμετρικά προς το μηδέν καθώς κινούμαστε προς τα άκρα του αγωγού. Υπό αυτές τις συνθήκες μπορώ να υποκαταστήσω το χωρικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο με το ακόλουθο ισοδύναμο ομογενές μαγνητικό πεδίο (χωρική μέση τιμή):

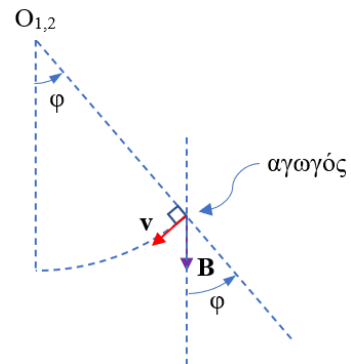
$$\vec{B}_{eff} = \left\{ \frac{1}{L} \int_0^L -B_0 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right\} \hat{z} = -B_0 \left\{ \frac{1}{L} \int_0^L \eta \mu^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right\} \hat{z} = -B_0 \left\{ \frac{1}{L} \frac{L}{2} \right\} \hat{z} = -\frac{B_0}{2} \hat{z} \quad [1]$$

Οπότε από δω και στο εξής μπορώ να κάνω οποιουδήποτε υπολογισμούς χρησιμοποιώντας το ενεργό μαγνητικό της εξ.[1] ακριβώς από πάνω. Όταν ο αγωγός αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα τότε δέχεται δύναμη Laplace η οποία έχει κατεύθυνση κατά τον άξονα OY (ο οποίος είναι κάθετος στους άξονες OX και OZ με φορά προς τα μέσα όπως βλέπουμε το δοθέν σχήμα της άσκησης), οπότε ανασηκώνεται προς τα μέσα ως προς το επίπεδο του σχήματος και σε κάποια φάση ισορροπεί σε οριζόντια θέση υψηλότερη από την αρχική θέση ισορροπίας του. Το επίπεδο που ορίζουν τα νήματα ανάρτησης και ο αγωγός κατά την ισορροπία του υπό την παρουσία ρεύματος με το επίπεδο OXZ έστω ότι είναι  $\phi_0$ . Θα ισχύει ότι

$$\left. \begin{aligned} 2T \cos \phi_0 = mg &\Rightarrow 2T \cos \phi_0 = \rho V g = \rho S L g \\ 2T \sin \phi_0 = F_L &\Rightarrow 2T \sin \phi_0 = B_{eff} I L \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2T \sin \phi_0}{2T \cos \phi_0} = \frac{B_{eff} I L}{\rho S L g} \Rightarrow \tan \phi_0 = \frac{B_{eff} I}{\rho S g} = \frac{B_0 I}{2 \rho S g} \quad [2]$$

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η (β).

**1.Β** Αν διακοπεί το συνεχές ρεύμα ο αγωγός θα αρχίσει να αιωρείται σαν εκκρεμές περί την αρχική οριζόντια θέση ισορροπίας του (αν δεν υπάρχουν τριβές στις θέσεις ανάρτησης, θα εκτελέσει αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις περί τη θέση ισορροπίας του αφού δεν εμφανίζεται επαγωγικό ρεύμα και κατ' επέκταση φαινόμενο Joule που θα μπορούσε να μετασηματίσει την μηχανική ενέργεια του αγωγού σε θερμότητα). Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος λοιπόν, σε μια τυχαία θέση υπό γωνία  $\phi$ , ισχύει για την επαγόμενη ΗΕΔ στα άκρα του αγωγού ότι



$$\mathcal{E}(\phi) = vB_{eff} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)L = \frac{1}{2} vLB_0 \cos \phi \quad [3]$$

Αφού η μηχανική ενέργεια διατηρείται, θεωρώντας ως αναφορά για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια την αρχική θέση ισορροπίας του αγωγού, θα ισχύει ότι

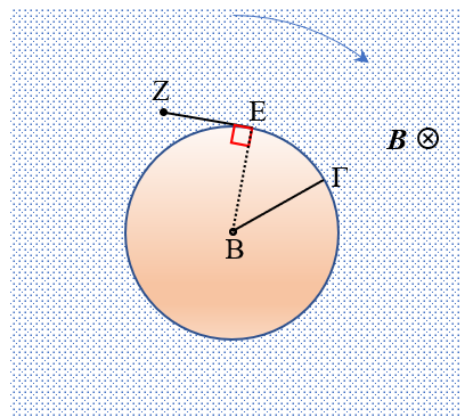
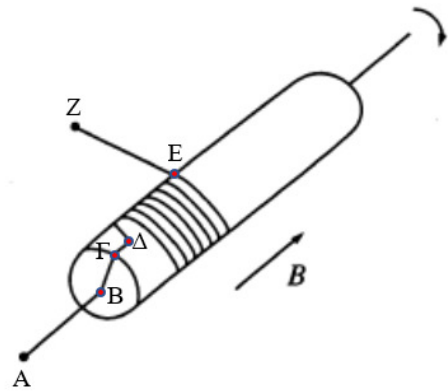
$$\frac{1}{2} mv^2 + mg(h - h \cos \phi) = mg(h - h \cos \phi_0) + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gh(\cos \phi - \cos \phi_0)} \quad [4]$$

Από τις εξ.[3] και [4] προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}(\phi) = \frac{1}{2} vLB_0 \cos \phi = \frac{1}{2} B_0 L \cos \phi \sqrt{2gh(\cos \phi - \cos \phi_0)} = B_0 L \sqrt{\frac{gh}{2}} \cos \phi \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0} \quad [5]$$

οπότε η σωστή απάντηση είναι η (γ).

2. Ας διαμερήσουμε το σύρμα στα ευθύγραμμα τμήματα AB, ΒΓ, ΓΔ και EZ όπως στο διπλανό σχήμα, και στο τμήμα ΔΕ που περιγράφει το τόξο του σύρματος γύρω από την περίμετρο του ξύλινου κυλίνδρου (αν ο αντίχειρας του δεξιού χεριού δείχνει από το Β προς το Α και κυρτώσω τα υπόλοιπα δάχτυλα προς τα κάτω τότε βρίσκω το πώς περιελίσσεται το σύρμα γύρω από τον κύλινδρο!), ως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για διευκόλυνση δίνεται και μια φέτα του συστήματος κάθετα στις γραμμές της μαγνητικής επαγωγής στην κάτω εικόνα χωρίς το τμήμα AB (σημειώνεται ότι το σημείο E δεν κείται κατ' ανάγκη σε κοινή ευθεία με το σημείο Γ, παράλληλη προς τον άξονα του κυλίνδρου). Το τμήμα AB είναι ακίνητο κατά την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου οπότε έχει μηδενική συνεισφορά στην επαγόμενη ΗΕΔ. Το τμήμα ΓΔ δεν συνεισφέρει στην επαγόμενη ΗΕΔ διότι ένα φορτίο σε εκείνο το τμήμα του σύρματος θα δέχονταν δύναμη Lorentz κάθετη στο τμήμα ΓΔ (και δεν μπορούμε να έχουμε κίνηση κάθετα στο σύρμα επί του τμήματος ΓΔ). Κάθε σημείο της περιέλιξης ΔΕ έχει ίδια ταχύτητα με τα σημεία της περιφέρειας του κυλίνδρου, κι επομένως ένα φορτίο οπουδήποτε στο τμήμα ΔΕ θα δέχονταν μια δύναμη Lorentz κάθετη στο σύρμα ... όμως δεν μπορώ να έχω κίνηση κάθετα στο σύρμα ... οπότε η περιέλιξη ΔΕ δεν συνεισφέρει στην επαγόμενη ΗΕΔ. Έμειναν τα τμήματα ΒΓ και EZ να εξεταστούν. Το τμήμα ΒΓ είναι σαν μία μικρή ράβδος μήκους  $R$  που περιστρέφεται κάθετα σε



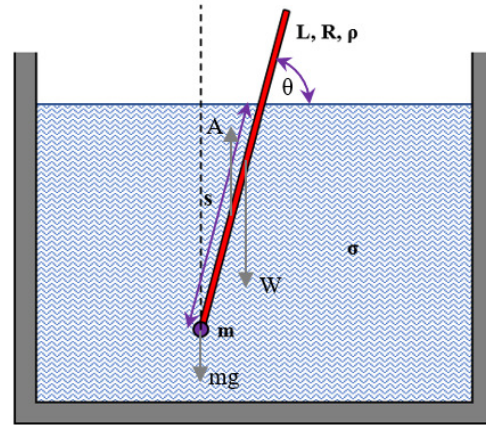


ομογενές μαγνητικό πεδίο, κι από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η επαγόμενη ΗΕΔ στα άκρα μιας τέτοια ράβδου είναι (αφού ο κύλινδρος εκτελεί  $N$  περιστροφές στη μονάδα του χρόνου η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής αυτού θα είναι  $\omega = 2\pi N \text{ rad/sec}$ )

$$\mathcal{E}_{\text{B}\Gamma} = \frac{1}{2} \omega B(\text{B}\Gamma)^2 = \frac{1}{2} 2\pi NBR^2 = \pi NBR^2 \quad [6]$$

Αν θεωρήσουμε τέλος ένα φορτίο στο τμήμα ΕΖ, τότε επειδή τα φορτία μπορούν να κινηθούν μόνο κατά το μήκος του σύρματος, μόνο η συνιστώσα της (γραμμικής) ταχύτητας η παράλληλη στο σύρμα θα είχε ενδιαφέρον, η οποία όμως θα οδηγούσε σε μια δύναμη Lorentz εγκάρσια στο τμήμα ΕΖ ... και δεν μπορούμε να έχουμε κίνηση φορτίου κάθετα στο σύρμα στο τμήμα ΕΖ ... συνεπώς ούτε το τμήμα ΕΖ συνεισφέρει στην επαγόμενη ΗΕΔ. Συνοψίζοντας, τελικώς εμφανίζεται επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ των άκρων Α και Ζ του σύρματος λόγω της συνεισφοράς του τμήματος ΒΓ, οπότε η σωστή απάντηση είναι η (β).

3. Έστω ότι  $s$  είναι το μήκος του βυθισμένου τμήματος της ράβδου και  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της ράβδου με την ήρεμη επιφάνεια του υγρού. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα φαίνονται με τα γκρι βελάκια στο διπλανό σχήμα. Επειδή ο όγκος του μεταλλικού σφαιριδίου είναι αμελητέος αγνοούμε την άνωση που δέχεται η εν λόγω μάζα. Το σύστημα ισορροπεί οπότε θα ισχύει ότι



$$\rho\pi R^2 Lg + mg = A \Rightarrow \rho\pi R^2 Lg + mg = \sigma\pi R^2 sg \Rightarrow m = \pi R^2 (\sigma s - \rho L) \Rightarrow \quad [7]$$

$$\frac{m}{\pi R^2} = \sigma s - \rho L \Rightarrow s = \frac{m}{\sigma\pi R^2} + \frac{\rho}{\sigma} L$$

Στην τελευταία σχέση ούτε η μάζα  $m$  ούτε το μήκος  $s$  είναι γνωστά! Πάλι λόγω ισορροπίας θα ισχύει επιπλέον ότι (μηδενισμός των ροπών ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου)

$$mg \frac{L}{2} \cos \theta = (\sigma\pi R^2 sg) \left( \frac{L}{2} - \frac{s}{2} \right) \cos \theta \Rightarrow m = \frac{\sigma\pi R^2}{L} s(L - s) \quad [8]$$

Αντικαθιστώντας την εξ.[7] στην εξ.[8] (για διευκόλυνση θέτουμε ότι  $\xi = \frac{m}{\sigma\pi R^2}$ , που έχει διαστάσεις μήκους) βρίσκουμε ότι

$$\xi = \frac{s}{L}(L-s) \Rightarrow L\xi = \left(\xi + \frac{\rho}{\sigma}L\right)\left(L - \xi - \frac{\rho}{\sigma}L\right) \Rightarrow L\xi = L\xi - \xi^2 - \frac{\rho}{\sigma}L\xi + \frac{\rho}{\sigma}L^2 - \frac{\rho}{\sigma}L\xi - \left(\frac{\rho}{\sigma}L\right)^2 \Rightarrow$$

$$0 = -\xi^2 - 2\frac{\rho}{\sigma}L\xi + \frac{\rho}{\sigma}L^2 - \left(\frac{\rho}{\sigma}L\right)^2 \Rightarrow \xi^2 + \left[2\frac{\rho}{\sigma}L\right]\xi - L^2\frac{\rho}{\sigma}\left[1 - \frac{\rho}{\sigma}\right] = 0$$
[9]

Οι λύσεις του τριωνύμου εύκολα βρίσκονται ως

$$\xi_1 = -\frac{\rho}{\sigma}L + L\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}, \quad \xi_2 = -\frac{\rho}{\sigma}L - L\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} < 0$$
[10]

και τελικώς

$$\frac{m}{\sigma\pi R^2} = -\frac{\rho}{\sigma}L + L\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} \Rightarrow m = \sigma\pi R^2 \left\{-\frac{\rho}{\sigma}L + L\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}\right\} \Rightarrow$$

$$m = \pi R^2 L \left\{-\rho + \sqrt{\rho\sigma}\right\} = \pi R^2 L \left\{-\sqrt{\rho^2} + \sqrt{\rho\sigma}\right\} = \pi R^2 L \sqrt{\rho} \left\{\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho}\right\} \Rightarrow m = M \left\{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} - 1\right\}$$
[11]

Απ' τις εξ.[7] και [11] βρίσκουμε ότι

$$s = \frac{m}{\sigma\pi R^2} + \frac{\rho}{\sigma}L = \frac{1}{\sigma}L\sqrt{\rho} \left\{\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho}\right\} + \frac{\rho}{\sigma}L = \frac{L}{\sigma}\sqrt{\rho\sigma} = L\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}$$
[12]

Πάμε τώρα να εξετάσουμε τις δοθείσες προτάσεις μία προς μία αναλυτικά.

**Πρόταση Α:** Το βυθισμένο τμήμα της ράβδου έχει μήκος  $s$  ανάλογο του λόγου των δύο δοθέντων πυκνοτήτων  $\rho/\sigma$ . → Από την εξ.[12] βλέπουμε ότι  $s \propto \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}$  οπότε η πρόταση αυτή είναι λανθασμένη.

**Πρόταση Β:** Εάν ισχύει ότι  $\sigma = 4\rho$ , τότε το παραπάνω σύστημα ισορροπεί ως περιγράφηκε όταν η μάζα του σφαιριδίου είναι ίση με το μισό της μάζας της ράβδου. → Από την εξ.[11]

βρίσκουμε ότι  $m = M \left\{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} - 1\right\} = M \left\{\sqrt{\frac{4\rho}{\rho}} - 1\right\} = M$ , δηλαδή το σύστημα ισορροπεί όταν το σφαιρίδιο έχει ίδια μάζα με τη ράβδο.

**Πρόταση Γ:** Το μήκος  $s$  του βυθισμένου τμήματος της ράβδου αυξάνεται αν αντικαταστήσω το σφαιρίδιο μάζας  $m$  με άλλο σφαιρίδιο διπλάσιας μάζας. → Από την εξ.[12] βλέπουμε ότι το βυθισμένο μήκος της ράβδου  $s$  δεν εξαρτάται από τη μάζα του σφαιριδίου οπότε η πρόταση αυτή είναι λανθασμένη (αυτό φαίνεται κι από τις εξ.[7] και [8] στις οποίες εάν

έχω στο αριστερό μέλος την μεταβλητή  $m / \pi R^2$  έχω μία διωνυμική σχέση ως προς  $s$  η οποία εμπεριέχει μόνο τις πυκνότητες  $\rho$  και  $\sigma$ ).

Πρόταση Δ: Η ισορροπία του συστήματος είναι ευσταθής γιατί η δύναμη της άνωσης ασκείται στη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος. → Το κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται σε απόσταση ίση προς

$$s_{CM} = \frac{M \frac{L}{2}}{m + M} = \frac{M \frac{L}{2}}{M \left\{ \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} - 1 \right\} + M} = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} = \frac{s}{2} \quad [13]$$

μετρημένη από τη θέση του σφαιριδίου, και σε εκείνη ακριβώς τη θέση ασκείται και η δύναμη της άνωσης, οπότε η άνωση ασκείται στη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος και δεν υπάρχει κίνδυνος ανατροπής του συστήματος (δηλ. η ισορροπία του είναι ευσταθής), οπότε αυτή η πρόταση είναι σωστή.

Συνοψίζοντας, η σωστή απάντηση είναι το **(δ)**.

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Α. Οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα σε ισορροπία φαίνονται αναλυτικά στο διπλανό σχήμα. Ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω έχουμε:

Σώμα  $m_2$ :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow m_2 g = T \quad [14]$$

Σώμα  $m_1$ :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow m_1 g + T = F_s \quad [15]$$

Δοκός:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{A,x} = F_B$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{A,y} = F_s + Mg \quad [16]$$

$$\Sigma \tau_E = 0 \Rightarrow F_A \sin \delta \frac{L}{2} = F_B \sin \phi_0 \frac{L}{2} \Rightarrow F_A \sin \delta = F_B \sin \phi_0$$

όπου ονομάσαμε  $\delta$  την γωνία που σχηματίζει ο φορέας της δύναμης άρθρωσης με την ευθεία AB (με την δοκό δηλαδή). Προφανώς θα ισχύει και ότι

$$F_{A,x} = F_A \cos(\delta + \phi_0), \quad F_{A,y} = F_A \sin(\delta + \phi_0) \quad [17]$$

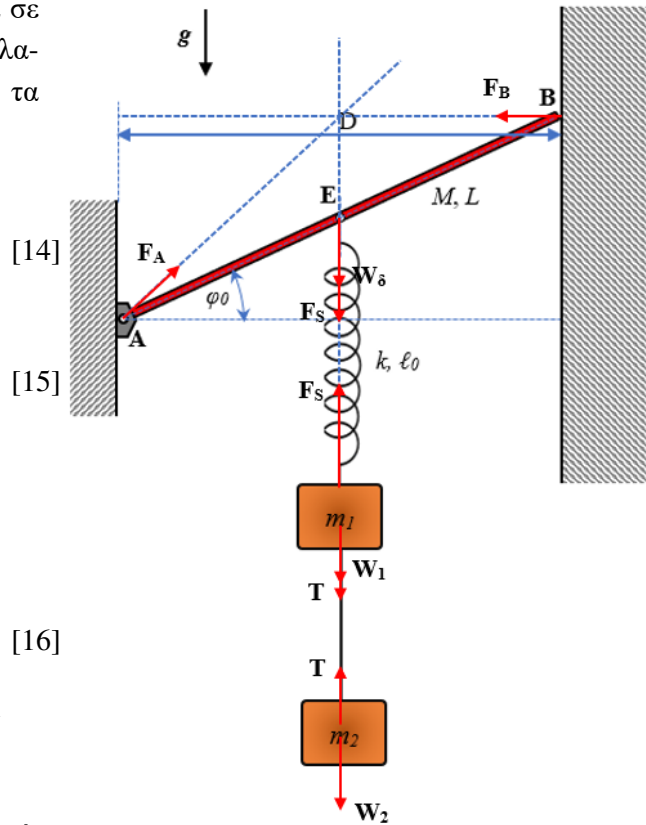
Από τις εξ.[14]-[16] βρίσκουμε ότι

$$F_{A,y} = F_s + Mg \Rightarrow F_{A,y} = T + m_1 g + Mg \Rightarrow F_{A,y} = (m_2 + m_1 + M)g \quad [18]$$

Επίσης, από τη γεωμετρία του σχήματος ισχύει ότι (θεωρώντας συντρέχουσες δυνάμεις επί της δοκού που ισορροπεί):

$$\cos \phi_0 = \frac{D}{L}, \quad \sin \phi_0 = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{L}, \quad \tan(\phi_0 + \delta) = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{\frac{L}{2} \cos \phi_0} = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{\frac{L D}{2 L}} = \frac{2\sqrt{L^2 - D^2}}{D} \quad [19]$$

Οπότε απ' τις εξ.[16]-[19] έχουμε ότι



$$\begin{aligned}
F_B = F_{A,x} = F_A \cos(\delta + \phi_0) &= \frac{F_{A,y}}{\sin(\delta + \phi_0)} \cos(\delta + \phi_0) \Rightarrow \\
F_B = F_{A,x} = F_A \cos(\delta + \phi_0) &= \frac{(m_2 + m_1 + M)g}{\sin(\delta + \phi_0)} \cos(\delta + \phi_0) \Rightarrow \\
F_B = F_{A,x} = F_A \cos(\delta + \phi_0) &= \frac{(m_2 + m_1 + M)g}{\tan(\delta + \phi_0)} \Rightarrow \\
F_B = F_{A,x} = F_A \cos(\delta + \phi_0) &= (m_2 + m_1 + M)g \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}}
\end{aligned} \tag{20}$$

Από τις εξ.[16] και [17] σημειώστε ότι

$$\begin{aligned}
F_A \sin \delta = F_B \sin \phi_0 &\Rightarrow F_A \sin \delta = F_{A,x} \sin \phi_0 \Rightarrow \\
F_A \sin \delta = F_A \cos(\delta + \phi_0) \sin \phi_0 &\Rightarrow \\
\frac{\sin \delta}{\sin \phi_0} = \cos(\delta + \phi_0) &\Rightarrow \frac{\sin \delta}{\sin \phi_0} = \cos \delta \cos \phi_0 - \sin \delta \sin \phi_0 \Rightarrow \\
\sin \delta = \cos \delta \sin \phi_0 \cos \phi_0 - \sin \delta \sin^2 \phi_0 &\Rightarrow \\
\sin \delta (1 + \sin^2 \phi_0) = \cos \delta \sin \phi_0 \cos \phi_0 &\Rightarrow \tan \delta = \frac{\sin \phi_0 \cos \phi_0}{1 + \sin^2 \phi_0} \Rightarrow \\
\tan \delta = \frac{D\sqrt{L^2 - D^2}}{2L^2 - D^2} &\Rightarrow \delta = \arctan \left\{ \frac{D\sqrt{L^2 - D^2}}{2L^2 - D^2} \right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

Σημειώστε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα προέκυψε αποκλειστικά από τις συνθήκες ισοροπίας της δοκού.

**B.** Σε αυτό το υποερώτημα θα θεωρήσουμε ως άγνωστη τη μάζα  $m_2$  προκειμένου να βρούμε το ζητούμενο άνω όριο ... . Η επιμήκυνση του ελατηρίου πριν ακόμη κοπεί το νήμα βρίσκεται ως

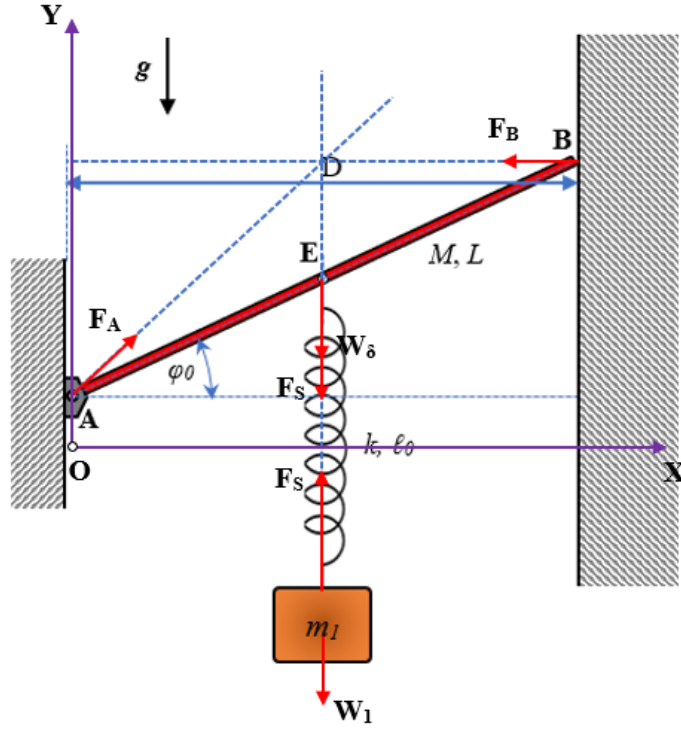
$$m_1 g + T = F_s \Rightarrow m_1 g + m_2 g = k \Delta \ell_1 \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \tag{22}$$

Όταν κοπεί το νήμα, η επιμήκυνση του ελατηρίου κατά την ισοροπία του σώματος μάζας  $m_1$  βρίσκεται ως

$$m_1 g = F_s \Rightarrow k \Delta \ell_2 = m_1 g \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{m_1 g}{k} < \Delta \ell_1 \quad [23]$$

και η θέση που έχει το σώμα μάζας  $m_1$  αμέσως μόλις κόβεται το νήμα είναι ακραία θέση για την ταλάντωση που ακολουθεί.

Στη συνέχεια επιλέγουμε το σύστημα αξόνων  $OXY$  του διπλανού σχήματος, με τον άξονα  $OX$  να διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας  $m_1$ . Θεωρώντας ως στάθμη αναφοράς της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη 'θέση ισορροπίας' του σώματος μάζας  $m_1$ , έχουμε από την Α.Δ.Ε. μεταξύ της θέσης του σώματος μάζας  $m_1$  κατά τη στιγμή που κόβεται το νήμα, και της θέσης μέγιστης προς τα πάνω απομάκρυνσής του (ως προς το κέντρο μάζας  $E$  της δοκού) ότι



$$0 + \frac{1}{2} k \Delta \ell_1^2 - m_1 g (\Delta \ell_1 - \Delta \ell_2) = 0 + \frac{1}{2} k (\Delta \ell_2 - y_{\max})^2 + m_1 g y_{\max} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k \Delta \ell_1^2 - m_1 g \frac{m_2 g}{k} = \frac{1}{2} k \left( \frac{m_1 g}{k} - y_{\max} \right)^2 + m_1 g y_{\max} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k \Delta \ell_1^2 - m_1 g \frac{m_2 g}{k} = \frac{(m_1 g)^2}{2k} - m_1 g y_{\max} + \frac{1}{2} k y_{\max}^2 + m_1 g y_{\max} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k \left( \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \right)^2 - m_1 g \frac{m_2 g}{k} = \frac{(m_1 g)^2}{2k} + \frac{1}{2} k y_{\max}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{(m_1^2 + 2m_1 m_2 + m_2^2) g^2}{k} - \frac{m_1 m_2 g^2}{k} = \frac{(m_1 g)^2}{2k} + \frac{1}{2} k y_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{(m_1^2 + m_2^2) g^2}{k} = \frac{(m_1 g)^2}{2k} + \frac{1}{2} k y_{\max}^2 \Rightarrow y_{\max}^2 = \frac{m_2^2 g^2}{k^2} \Rightarrow y_{\max} = \frac{m_2 g}{k}$$

[24]

πράγμα όχι και τόσο μη-αναμενόμενο με βάση τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος. Το ερώτημα είναι πόση είναι η δύναμη του ελατηρίου όταν το σώμα μάζας  $m_1$  είναι στην υψηλότερη δυνατή θέση που μπορεί να έχει μετά το κόψιμο του νήματος ... γιατί τότε μόνο υπάρχει κίνδυνος να ανασηκωθεί η δοκός. Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης αυτό που

θέλουμε είναι όταν κοπεί το νήμα να μην ανασηκωθεί έστω και οριακά η δοκός ... όπερ σημαίνει ότι για την δοκό θα εξακολουθούν να ισχύουν οι εξισώσεις της στατικής

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F_{A,x} = F_B \Rightarrow F_B = F_A \cos(\delta + \phi_0) \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_{A,y} = F_S + Mg \Rightarrow F_A \sin(\delta + \phi_0) = F_S + Mg \\ \Sigma \tau_E = 0 &\Rightarrow F_A \sin \delta \frac{L}{2} = F_B \sin \phi_0 \frac{L}{2} \Rightarrow F_A \sin \delta = F_B \sin \phi_0\end{aligned}\quad [25]$$

Κατά την ισορροπία της δοκού η γεωμετρία του συστήματος δεν αλλάζει, δηλαδή η γωνία  $\phi_0$  παραμένει σταθερή, κι επειδή ένεκα των συνθηκών ισορροπίας ισχύει και η εξ.[21] ούτε η γωνία  $\delta$  αλλάζει. Δηλαδή το σύστημα των εξ.[25] ισχύει χωρίς μεταβολή των γεωμετρικών παραμέτρων  $\phi_0$  και  $\delta$ . Η δύναμη του ελατηρίου όμως  $F_S$  είναι μεταβλητή δύναμη κατά την κίνηση του σώματος μάζας  $m_1$  ... πώς μπορεί να ικανοποιηθεί το σύστημα των εξ.[25]; ... το σύστημα αυτών των εξισώσεων μπορεί να ικανοποιηθεί αν θεωρήσουμε ότι όλες οι δυνάμεις που δέχεται η δοκός έχουν μεταβαλλόμενο μέτρο και μόνον ... που στην ουσία το ρυθμίζει η δύναμη του ελατηρίου. Οπότε το σύστημα των εξ.[25] αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F_B(y) = F_A(y) \cos(\delta + \phi_0) \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_A(y) \sin(\delta + \phi_0) = F_S(y) + Mg \\ \Sigma \tau_E = 0 &\Rightarrow F_A(y) \sin \delta = F_B(y) \sin \phi_0\end{aligned}\quad [26]$$

Από τις δύο πρώτες εξ.[26] είναι

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F_B(y) = F_A(y) \cos(\delta + \phi_0) \\ F_A(y) \sin(\delta + \phi_0) &= F_S(y) + Mg \Rightarrow \frac{F_B(y)}{\cos(\delta + \phi_0)} \sin(\delta + \phi_0) = F_S(y) + Mg \Rightarrow \\ F_B(y) &= [F_S(y) + Mg] \cot(\delta + \phi_0) \Rightarrow F_B(y) = \frac{F_S(y) + Mg}{\tan(\delta + \phi_0)} = \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \{F_S(y) + Mg\}\end{aligned}\quad [27]$$

Από την εξ.[27] βλέπουμε ότι η δύναμη που δέχεται η δοκός από το τοίχωμα συσχετίζεται γραμμικά με τη δύναμη του ελατηρίου, για την οποία ισχύει ότι

$$F_S(y) = k(\Delta \ell_2 - y) = k\left(\frac{m_1 g}{k} - y\right) = m_1 g - ky\quad [28]$$

Οπότε από τις εξ. [27] και [28] ισχύει ότι

$$F_B(y) = \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \{F_s(y) + Mg\} \Rightarrow F_B(y) = \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \{m_1 g - ky + Mg\} \quad [29]$$

Ανασκήκωση της δοκού δεν θα έχουμε όταν ισχύει η συνθήκη ότι

$$F_B(y) \geq 0, \forall y \xrightarrow{y \leq y_{\max}} F_B(y = y_{\max}) \geq 0 \Rightarrow \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \left\{ m_1 g - k \frac{m_2 g}{k} + Mg \right\} \geq 0 \Rightarrow$$

$$m_1 g - m_2 g + Mg \geq 0 \Rightarrow m_2^{\max} \leq m_1 + M$$

[30]

Γ. Για να απαντήσουμε σε αυτό το υποερώτημα θα πρέπει να χωρίσουμε την ανάλυσή μας σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα το υπόλοιπο σύστημα δεν ‘επικοινωνεί’ με το σώμα μάζας  $m_2$  γιατί δεν υπάρχει τάση στο νήμα ... άρα το υπόλοιπο σύστημα ισορροπεί περί την υψηλότερη θέση ισορροπίας, ενώ το σώμα μάζας  $m_2$  εκτελεί ελεύθερη πτώση. Θεωρούμε ως  $t = 0$  τη στιγμή που η όλη διάταξη αφήνεται ελεύθερη. Το νήμα τεντώνεται σε χρόνο ίσο προς

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \text{ Θα θεωρήσουμε το τέντωμα του νήματος ως ένα είδος ‘πλαστικής κρούσης’}$$

οπότε από την Α.Δ.Ο. κατά την κατακόρυφη διεύθυνση θα ισχύει ότι (οι δυνάμεις βαρύτητας και η δύναμη του ελατηρίου δεν αποτελούν κρουστικές ωθήσεις γιατί δεν μπορούν να συμπεριφερθούν τόσο «ακανόνιστα» όπως συμβαίνει με μια κρουστική ώθηση κατά τον αμελητέο χρόνο τεντώματος του νήματος):

$$\downarrow (+): m_2 v_2 + 0 = (m_1 + m_2) v_{\sigma\sigma\sigma} \Rightarrow v_{\sigma\sigma\sigma} = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gs} \quad [31]$$

Κατά το τέντωμα του νήματος έχουμε επίσης απώλεια κινητικής ενέργειας του συστήματος και αυτό το σημείο πρέπει να το λάβουμε υπόψη στη συνέχεια. Ένα άλλο σημείο που πρέπει να λάβουμε υπόψη στην περαιτέρω ανάλυσή μας είναι το γεγονός ότι μόλις τεντωθεί το νήμα η θέση ισορροπίας του συστήματος αλλάζει και είναι η χαμηλότερη θέση ισορροπίας που είδαμε στην αρχή της άσκησης ... η δε θέση στην οποία λαμβάνει χώρα το τέντωμα του νήματος είναι τυχαία θέση ταλάντωσης του «συσσωματώματος» που περιγράφηκε παραπάνω.

Στο δεύτερο βήμα οι δύο μάζες  $m_1$  και  $m_2$  κινούμενες ως «συσσωμάτωμα» προς τα κάτω επιμηκύνουν το ελατήριο. Θεωρούμε για διευκόλυνση ως στάθμη αναφοράς της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη ‘θέση ισορροπίας’ της μάζας  $m_1$  του «συσσωματώματος» και ως θετική φορά εκείνη προς τα πάνω. Από την Α.Δ.Ε. μεταξύ της θέσης όπου τεντώνεται το νήμα και της θέσης της μέγιστης δυνατής επιμήκυνσης του ελατηρίου έχουμε ότι (δεν χρειάζεται να εστιάσουμε στην κατακόρυφη θέση και των δύο σωμάτων, μας αρκεί η κατακόρυφη θέση της μάζας  $m_1$  αφού η μάζα  $m_2$  είναι πάντοτε κατά  $s$  πιο κάτω της):



$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\sigma\nu\sigma}^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_2^2 + m_1g(\Delta\ell_1 - \Delta\ell_2) + m_2g(\Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 - s) =$$

$$0 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1 + y_{\max})^2 - m_1gy_{\max} - m_2g(y_{\max} + s) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\sigma\nu\sigma}^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{m_1g}{k}\right)^2 + m_1g\frac{m_2g}{k} + m_2g\left(\frac{m_2g}{k} - s\right) =$$

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{(m_1 + m_2)g}{k} + y_{\max}\right)^2 - m_1gy_{\max} - m_2g(y_{\max} + s) \Rightarrow$$

$$\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}gs + \frac{1}{2}k\left(\frac{m_1g}{k}\right)^2 + \frac{m_1m_2g^2}{k} + \frac{m_2^2g^2}{k} - m_2gs =$$

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{(m_1 + m_2)^2g^2}{k^2} + 2\frac{(m_1 + m_2)g}{k}y_{\max} + y_{\max}^2\right) - m_1gy_{\max} - m_2g(y_{\max} + s) \Rightarrow$$

$$\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}gs + \frac{1}{2}\frac{m_1^2g^2}{k} + \frac{m_1m_2g^2}{k} + \frac{m_2^2g^2}{k} = \frac{1}{2}\frac{(m_1 + m_2)^2g^2}{k} + \frac{1}{2}ky_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}gs + \frac{1}{2}\frac{m_1^2g^2}{k} + \frac{m_1m_2g^2}{k} + \frac{m_2^2g^2}{k} = \frac{1}{2}\frac{(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2)g^2}{k} + \frac{1}{2}ky_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}gs + \frac{m_2^2g^2}{k} = \frac{1}{2}\frac{m_2^2g^2}{k} + \frac{1}{2}ky_{\max}^2 \Rightarrow \frac{m_2^2}{m_1 + m_2}gs + \frac{1}{2}\frac{m_2^2g^2}{k} = \frac{1}{2}ky_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$y_{\max} = \sqrt{\frac{2}{k}m_2^2\left[\frac{gs}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}\frac{g^2}{k}\right]} \Rightarrow y_{\max} = \frac{m_2g}{k}\sqrt{\frac{2ks}{(m_1 + m_2)g} + 1}$$

[32]

όπου οι αποστάσεις  $y$  μετρώνται από τη 'θέση ισορροπίας' της μάζας  $m_1$  του «συσσωματώματος» και λάβαμε υπόψη και τον περιορισμό ότι  $s < \frac{m_2g}{k}$  κατά τον υπολογισμό των βαρυτικών δυναμικών ενέργειών στην πρώτη σειρά της εξ.[32].

Θα προχωρήσουμε τώρα να βρούμε την μέγιστη δύναμη που δέχεται η δοκός από την άρθρωση. Επειδή και πάλι η δοκός ισορροπεί θα ισχύει η προσέγγιση που κάναμε στο προηγούμενο υποερώτημα, δηλαδή το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_B(y) = F_A(y) \cos(\delta + \phi_0)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A(y) \sin(\delta + \phi_0) = F_s(y) + Mg$$

$$\Sigma \tau_E = 0 \Rightarrow F_A(y) \sin \delta = F_B(y) \sin \phi_0$$

όπου τώρα θέλουμε να λύσουμε ως προς την δύναμη άρθρωσης  $F_A$ . Είναι λοιπόν

$$\left\{ \begin{array}{l} F_B^2(y) = F_A^2(y) \cos^2(\delta + \phi_0) \\ \{F_s(y) + Mg\}^2 = F_A^2(y) \sin^2(\delta + \phi_0) \end{array} \right\} \Rightarrow F_A^2(y) = F_B^2(y) + \{F_s(y) + Mg\}^2 \Rightarrow$$

$$F_A^2(y) = \left( \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \{F_s(y) + Mg\} \right)^2 + \{F_s(y) + Mg\}^2 \Rightarrow$$

$$F_A(y) = |\{F_s(y) + Mg\}| \sqrt{\left( \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \right)^2 + 1} = |\{F_s(y) + Mg\}| \sqrt{\frac{D^2}{4(L^2 - D^2)} + 1} \quad [33]$$

όπου για τη δύναμη του ελατηρίου ισχύει τώρα ότι

$$F_s(y) = k(\Delta \ell_1 - y) = k \left( \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - y \right) = (m_1 + m_2)g - ky \quad [34]$$

και υπενθυμίζεται ότι η θετική φορά ελήφθη προς τα πάνω (άρα κάτω από θέση ισορροπίας του συσσωματώματος είναι  $y < 0$ ). Από τις εξ.[33] και [34] είναι

$$F_A(y) = |\{(m_1 + m_2)g - ky + Mg\}| \sqrt{\frac{D^2}{4(L^2 - D^2)} + 1} = |\{(m_1 + m_2 + M)g - ky\}| \sqrt{\frac{D^2}{4(L^2 - D^2)} + 1} \quad [35]$$

Η δύναμη άρθρωσης προκύπτει και πάλι γραμμικώς εξαρτημένη από τη δύναμη του ελατηρίου όπως φαίνεται από την εξ.[33]. Ως εκ τούτου λοιπόν μεγιστοποιείται όταν

$$F_A(y = -y_{\max}) = \left\| \left\{ (m_1 + m_2)g + k \frac{m_2 g}{k} \sqrt{\frac{2ks}{(m_1 + m_2)g} + 1} + Mg \right\} \right\| \sqrt{\frac{D^2}{4(L^2 - D^2)} + 1} \Rightarrow$$

$$F_A(y = -y_{\max}) = \left\| \left\{ (m_1 + m_2 + M)g + m_2 g \sqrt{\frac{2ks}{(m_1 + m_2)g} + 1} \right\} \right\| \sqrt{\frac{D^2}{4(L^2 - D^2)} + 1}$$

[36]

όπου χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα της εξ.[32].

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την μέγιστη δύναμη που δέχεται η δοκός από τον τοίχο τότε μπορούμε να επικαλεστούμε τις εξ.[27] και [34] και είναι

$$F_B(y) = \frac{F_s(y) + Mg}{\tan(\delta + \phi_0)} = \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \{F_s(y) + Mg\} \rightarrow$$

$$F_B(y = -y_{\max}) = \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \{(m_1 + m_2 + M)g + ky_{\max}\} \Rightarrow$$

[37]

$$F_B(y = -y_{\max}) = \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \left\{ (m_1 + m_2 + M)g + k \frac{m_2 g}{k} \sqrt{\frac{2ks}{(m_1 + m_2)g} + 1} \right\} \Rightarrow$$

$$F_B(y = -y_{\max}) = \frac{D}{2\sqrt{L^2 - D^2}} \left\{ (m_1 + m_2 + M)g + m_2 g \sqrt{\frac{2ks}{(m_1 + m_2)g} + 1} \right\}$$

Σχόλιο: Στο υποερώτημα αυτό θέλουμε να βρούμε την μέγιστη δυνατή δύναμη που δέχεται η δοκός από την άρθρωση καθώς και από το τοίχωμα ... και θεωρήσαμε ότι αυτό μπορεί να συμβεί όταν το 'συσσωμάτωμα' είναι στην κατώτερη δυνατή θέση της κατακόρυφης κίνησής του ... δεν μας ενδιαφέρει για το πώς θα εξελιχθεί η κίνηση του συσσωματώματος από εκεί και ύστερα ... για παράδειγμα ακόμη κι αν τύχει να χαλαρώσει το νήμα σε κάποια φάση ... σίγουρα στην πορεία θα ξανατεντωθεί ... πράγμα που θα οδηγήσει σε απώλεια ενέργειας, και άρα η νέα κατώτερη δυνατή θέση του συσσωματώματος θα είναι υψηλότερη από την κατώτερη δυνατή θέση που εξετάσαμε στην επίλυση της άσκησης ... άρα δεν μιλάμε για μέγιστη δυνατή δύναμη που δέχεται η δοκός είτε από την άρθρωση, είτε από το τοίχωμα.

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

**A.** Μόλις η ράβδος OA δέχεται την εγκάρσια ώθηση  $\Omega$  αρχίζει να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο περί το σημείο O, όπως φαίνεται στην κάτοψη της όλης διάταξης στο σχήμα παρακάτω. Κατά τη διάρκεια της παραπάνω κίνησης αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ  $\mathcal{E}$  στη ράβδο με την πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα. Η ενέργεια διατηρείται, διότι δεν αναπτύσσεται ακόμη κάποιο επαγωγικό ρεύμα μιας και δεν έχει σχηματιστεί κάποιος κλειστός βρόχος, αλλά και δεδομένου ότι οι τριβές με την άρθρωση στο O θεωρούνται αμελητέες. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την ώθηση βρίσκεται ως εξής:

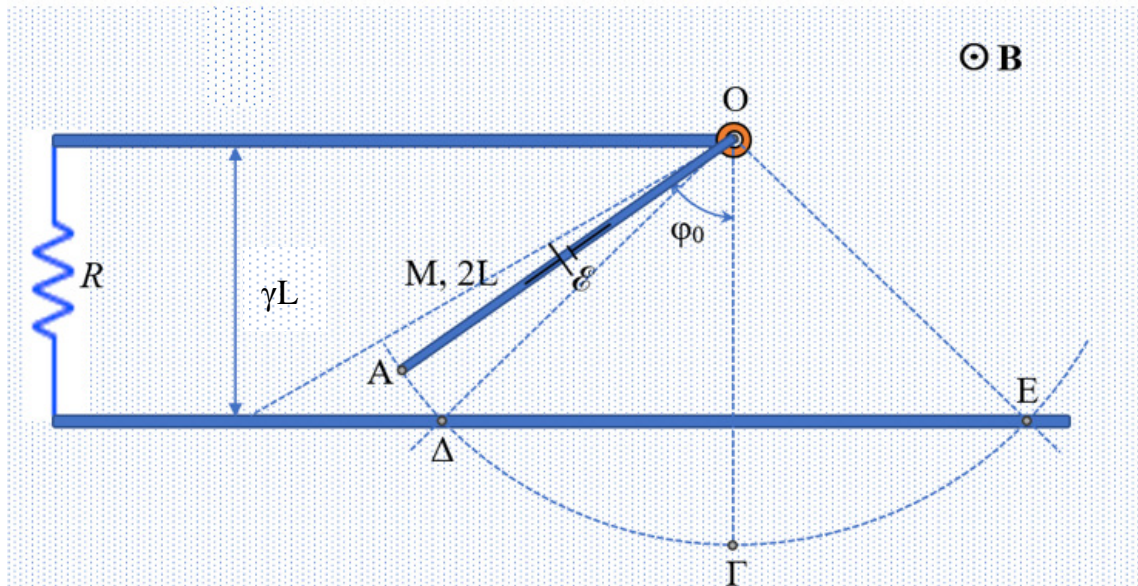
$$\Delta \vec{L} = \vec{OA} \times \vec{\Omega} \Rightarrow L_{\rho} \hat{z} - 0 = 2L\Omega \hat{z} \Rightarrow L_{\rho} = 2L\Omega \Rightarrow$$

$$I_O \omega = 2L\Omega \Rightarrow \left\{ \frac{1}{12} M 4L^2 + ML^2 \right\} \omega = 2L\Omega \Rightarrow \frac{4}{3} ML^2 \omega = 2L\Omega \Rightarrow L\omega = \frac{3}{4} \frac{2\Omega}{M} = \frac{3\Omega}{2M} \rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{3\Omega}{2ML}$$

[38]

όπου ο άξονας OZ είναι κάθετος στο επίπεδο της διάταξης (ή του σχήματος, με φορά προς το μάτι του αναγνώστη).

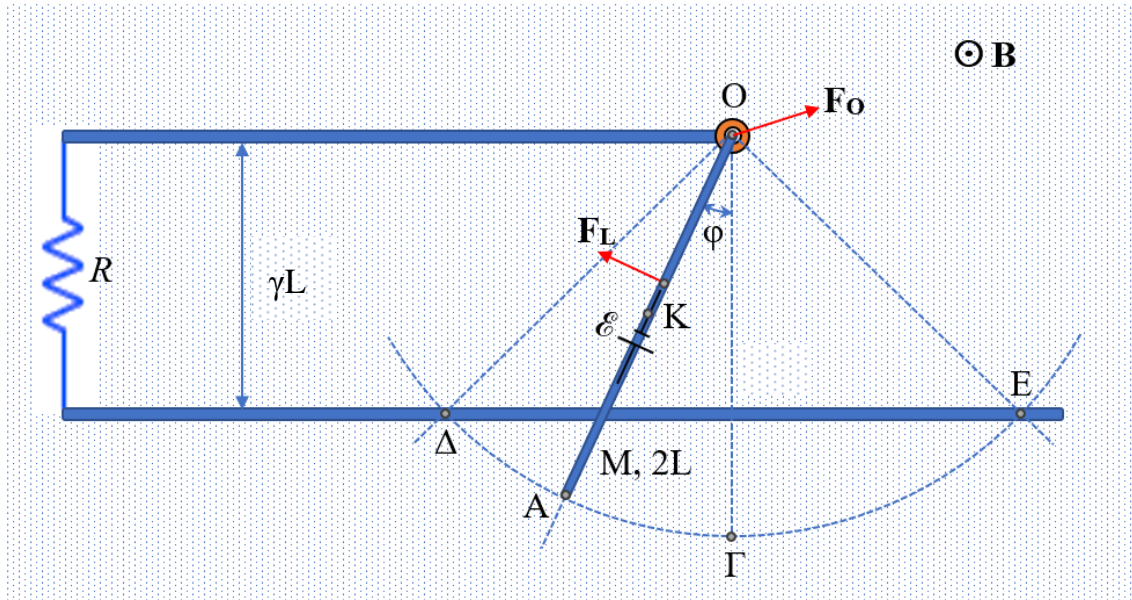


Μόλις η ράβδος αγγίζει τον έναν οριζόντιο οδηγό σχηματίζεται κλειστός βρόχος οπότε εμφανίζεται επαγωγικό ρεύμα κατά μήκος της ράβδου, και σε αυτή την περίπτωση ασκείται στη ράβδο επιπλέον η δύναμη Laplace, πέραν της δύναμης που δέχεται από την άρθρωση. Ας θεωρήσουμε μια τυχαία χρονική στιγμή κατά την οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία  $\phi$  με την κάθετο  $OG$ , ευρισκόμενη σε επαφή με τον οριζόντιο οδηγό. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία, η επαγωγική ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα μία ράβδου που περιστρέφεται περί το

ένα άκρο της το οποίο θεωρείται ακλόνητο βρίσκεται ως (κατά τη στιγμή που έχει γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ )

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B\omega(2L)^2 = 2B\omega L \quad [39]$$

σωστά; ... όχι ακριβώς στην προκειμένη περίπτωση διότι το επαγωγικό ρεύμα κινείται πάνω στον κλειστό βρόχο που σχηματίζεται από το στιγμιαίο σημείο επαφής της ράβδου ΟΑ με τον οριζόντιο οδηγό, κι επομένως, δεν βλέπει την επαγόμενη ΗΕΔ της εξ.[39] η οποία αναπτύσσεται μεταξύ των δύο άκρων της ράβδου, αλλά κάτι λιγότερο ... συγκεκριμένα, βλέπει την ΗΕΔ που αναπτύσσεται μεταξύ του άκρου Ο και του στιγμιαίου σημείου επαφής της ράβδου ΟΑ με τον οριζόντιο οδηγό, δηλαδή βλέπει ΗΕΔ ίση προς



$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} B\omega \left( \frac{\gamma L}{\cos \phi} \right)^2 = \frac{1}{2} B\omega \left( \frac{\gamma^2 L^2}{\cos^2 \phi} \right) = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\cos^2 \phi} B\omega L^2 \quad [40]$$

Το δε επαγωγικό ρεύμα στον σχηματιζόμενο κλειστό βρόχο είναι

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mathcal{E}'}{\left( R + \frac{\gamma L}{\cos \phi} \lambda \right)} = \frac{1}{\left( R + \frac{\gamma L}{\cos \phi} \lambda \right)} \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\cos^2 \phi} B\omega L^2 = \frac{1}{2} \frac{B\omega L^2}{R} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^2}{\cos \phi} \quad [41]$$

όπου λάβαμε υπόψη το τμήμα της ράβδου από το σημείο Ο ως το στιγμιαίο σημείο επαφής της με τον οριζόντιο οδηγό όσον αφορά στην ωμική αντίσταση της ράβδου, η οποία συνδέεται σε σειρά με τον αντιστάτη R (όσον αφορά στη ροή του επαγωγικού ρεύματος).

Περαιτέρω, ο ρυθμός απώλειας της ολικής ενέργειας της ράβδου από την στιγμή που αγγίζει τον οριζόντιο οδηγό και κήθεν είναι ίσος με την ισχύ που καταναλώνεται λόγω φαινομένου

Joule στις διάφορες ωμικές αντιστάσεις κατά μήκος του μεταβαλλόμενου κλειστού βρόχου που διαρρέει το επαγωγικό ρεύμα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= -I_{\varepsilon\pi}^2 \left( R + \frac{\gamma L}{\cos \phi} \lambda \right) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = - \left[ \frac{1}{2} \frac{B\omega L^2}{R} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^2}{\cos \phi} \right]^2 \left( R + \frac{\gamma L}{\cos \phi} \lambda \right) \Rightarrow \\
 \frac{dE}{dt} &= - \frac{1}{4} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)^2} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 \omega^2 L^4}{R^2} \left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right) R \Rightarrow \\
 \frac{dE}{dt} &= - \frac{1}{4} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 \omega^2 L^4}{R} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2}{3} ML^2 \dot{\phi}^2 \right\} = - \frac{1}{4} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 \omega^2 L^4}{R} \Rightarrow \\
 \frac{4}{3} ML^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} &= - \frac{1}{4} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^4}{R} \dot{\phi}^2 \xrightarrow{\dot{\phi} \neq 0} \frac{4}{3} ML^2 \ddot{\phi} = - \frac{1}{4} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^4}{R} \dot{\phi} \Rightarrow \\
 \ddot{\phi} &= - \frac{3}{16} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^2}{MR} \dot{\phi}
 \end{aligned}$$

[42]

όπου χρησιμοποίησαμε την κινητική ενέργεια της ράβδου

$$K_{\rho} = \frac{1}{2} M v_K^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M 4L^2 \omega^2 = \frac{1}{2} ML^2 \omega^2 + \frac{1}{6} ML^2 \omega^2 = \frac{2}{3} ML^2 \omega^2 = \frac{2}{3} ML^2 \dot{\phi}^2 \quad [43]$$

Περαιτέρω είναι

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi} &= - \frac{3}{16} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^2}{MR} \dot{\phi} \xrightarrow{\dot{\phi} = \omega} \frac{d\omega}{d\phi} \omega = - \frac{3}{16} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^2}{MR} \omega \Rightarrow \\
 \xrightarrow{\omega \neq 0} \frac{d\omega}{d\phi} &= - \frac{3}{16} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^2}{MR} \Rightarrow d\omega = - \frac{3}{16} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^2}{MR} d\phi \Rightarrow \\
 \int_{\omega_0}^0 d\omega' &= - \frac{3}{16} \frac{\gamma^4 B^2 L^2}{MR} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{1}{\cos^3 \phi} d\phi \Rightarrow \omega_0 = \frac{3}{16} \frac{\gamma^4 B^2 L^2}{MR} \int_{-\phi_1}^{+\phi_1} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{1}{\cos^3 \phi} d\phi
 \end{aligned}$$

[44]

όπου  $\cos \phi_1 = \frac{\gamma L}{2L} \Rightarrow \phi_1 = \arccos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$  και τα όρια ολοκλήρωσης στο δεξιό μέλος επελέγησαν έτσι γιατί οι απώλειες μηχανικής ενέργειας εμφανίζονται μόνο όταν η ράβδος διαγράφει το τόξο  $\widehat{\Delta E}$ . Περαιτέρω, είναι  $\omega_0 = \frac{3\Omega}{2ML}$  (παραπομπή στην εξ.[38]). Οπότε η εξ.[44] αναδιατυπώνεται ως

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{3}{16} \frac{\gamma^4 B^2 L^2}{MR} \int_{-\phi_1}^{+\phi_1} \frac{1}{\left(\cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R}\right)} \frac{1}{\cos^3 \phi} d\phi \\ \omega_0 &= \frac{3\Omega}{2ML} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega = \frac{1}{4} \frac{\gamma^4 B^2 L^3}{R} \int_0^{\phi_1} \frac{1}{\left(\cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R}\right)} \frac{1}{\cos^3 \phi} d\phi \quad [45]$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξ.[45] είναι επίτονο και αφήνεται ως έχει μιας και η παράμετρος που εμφανίζεται στον παρανομαστή είναι αδιάστατη. Κλείνοντας το υποερώτημα αυτό από την εξ.[44] παρατηρήστε ότι

$$\frac{d\omega}{d\phi} = -\frac{3}{16} \frac{1}{\left(\cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R}\right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^2}{MR} < 0, \quad \forall \phi \in [-\phi_1, \phi_1] \quad [46]$$

**B.** Για το υποερώτημα αυτό θα χρειαστεί να προχωρήσουμε στη μελέτη της δυναμικής της ράβδου ΟΑ, οπότε εστιάζουμε στο κέντρο μάζας της Κ. Πριν προχωρήσουμε όμως παρακάτω θα κάνουμε μια παρατήρηση για τη δύναμη Laplace στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Εφόσον το επαγωγικό ρεύμα κινείται πάνω στον κλειστό βρόχο που σχηματίζεται από το στιγμιαίο σημείο επαφής της ράβδου ΟΑ με τον οριζόντιο οδηγό, η δύναμη Laplace (η οποία ασκείται μόνο πάνω στο τμήμα της ράβδου ΟΑ το οποίο διαρρέεται από ρεύμα) βρίσκεται ως

$$F_L(\phi) = BI_{\varepsilon\pi} \left( \frac{\gamma L}{\cos \phi} \right) = B \frac{1}{2} \frac{B\omega L^2}{R} \frac{1}{\left(\cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R}\right)} \frac{\gamma^2}{\cos \phi} \left( \frac{\gamma L}{\cos \phi} \right) = \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 \omega L^3}{R} \frac{1}{\left(\cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R}\right)} \frac{1}{\cos^2 \phi} \quad [47]$$

και θα θεωρήσουμε ότι ασκείται στο στιγμιαίο κέντρο μάζας του τμήματος της ράβδου που εκτείνεται από το σημείο Ο ως το στιγμιαίο σημείο επαφής της ράβδου με τον οριζόντιο οδηγό επί του οποίου βαίνει (γι' αυτό και στο προηγούμενο σχήμα η δύναμη Laplace δεν εμφανίζεται εφαρμοζόμενη στο κέντρο μάζας Κ της ράβδου). Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση ότι  $\lambda L \rightarrow 0$ , η εξ.[47] απλοποιείται ως ακολούθως

$$F_L(\phi) = \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 \omega L^3}{R} \frac{1}{\left(\cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R}\right)} \frac{1}{\cos^2 \phi} \rightarrow F_L(\phi) = \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \frac{\omega(\phi)}{\cos^3 \phi} \quad [48]$$

Περαιτέρω από την εξ.[46] έχουμε ότι (και πάλι με βάση την προσέγγιση ότι  $\lambda L \rightarrow 0$ )

$$\frac{d\omega}{d\phi} \approx -\frac{3}{16} \frac{\gamma^4 B^2 L^2}{\cos^4 \phi MR} \Rightarrow d\omega = -\frac{3}{16} \frac{\gamma^4 B^2 L^2}{\underbrace{MR}_{\equiv C}} \frac{d\phi}{\cos^4 \phi} \rightarrow$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega' = -C \int_{-\phi_1}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos^4 \phi'} \Rightarrow \omega(\phi) = \omega_0 - C \left\{ \frac{1}{3} \tan \phi \left[ 2 + \frac{1}{\cos^2 \phi} \right] + \frac{2}{3} \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\omega(\phi) = \omega_0 - \frac{1}{16} \frac{\gamma^4 B^2 L^2}{MR} \tan \phi \left[ 2 + \frac{1}{\cos^2 \phi} \right] - \frac{1}{8} \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \Rightarrow$$

$$\omega(\phi) = \left\{ \frac{3\Omega}{2ML} - \frac{1}{8} \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \right\} - \frac{1}{16} \frac{\gamma^4 B^2 L^2}{MR} \tan \phi \left[ 2 + \frac{1}{\cos^2 \phi} \right]$$

[49]

όπου από την εξ.[45] είναι

$$\Omega = \frac{1}{4} \frac{\gamma^4 B^2 L^3}{R} \int_0^{\phi_1} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right) \cos^3 \phi} d\phi \rightarrow \Omega \approx \frac{1}{4} \frac{\gamma^4 B^2 L^3}{R} \int_0^{\phi_1} \frac{1}{\cos^4 \phi} d\phi \Rightarrow$$

$$\Omega \approx \frac{1}{4} \frac{\gamma^4 B^2 L^3}{R} \left\{ \frac{2}{3} \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] - 0 \right\} = \frac{1}{6} \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right]$$

[50]

Από τις εξ.[49] και [50] περαιτέρω είναι

$$\omega(\phi) = \frac{1}{8} \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] - \frac{1}{16} \frac{\gamma^4 B^2 L^2}{MR} \tan \phi \left[ 2 + \frac{1}{\cos^2 \phi} \right]$$

[51]

Ας προχωρήσουμε τώρα στις εξισώσεις της δυναμικής περί το κέντρο μάζας K της ράβδου (σημειώστε ότι ως Σ θεωρούμε το στιγμιαίο σημείο επαφής της ράβδου με τον οριζόντιο οδηγό επί του οποίου βαίνει – παραπομπή στο παρακάτω σχήμα):

$$\vec{\tau}_{F_L} + \vec{\tau}_{F_{o,t}} = I_K \vec{\alpha}_K \rightarrow \left\{ (\text{OK}) - \frac{(\text{O}\Sigma)}{2} \right\} F_L - (\text{OK}) F_{o,t} = \frac{1}{12} M(2L)^2 \alpha_K \Rightarrow \left\{ L - \frac{\gamma L}{2 \cos \phi} \right\} F_L - L F_{o,t} = \frac{1}{3} M L^2 \alpha_K \Rightarrow$$

$$\left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 \cos \phi} \right\} F_L - F_{o,t} = \frac{1}{3} M L \alpha_K \Rightarrow \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 \cos \phi} \right\} F_L - F_{o,t} = \frac{1}{3} M L \ddot{\phi}$$

[52]

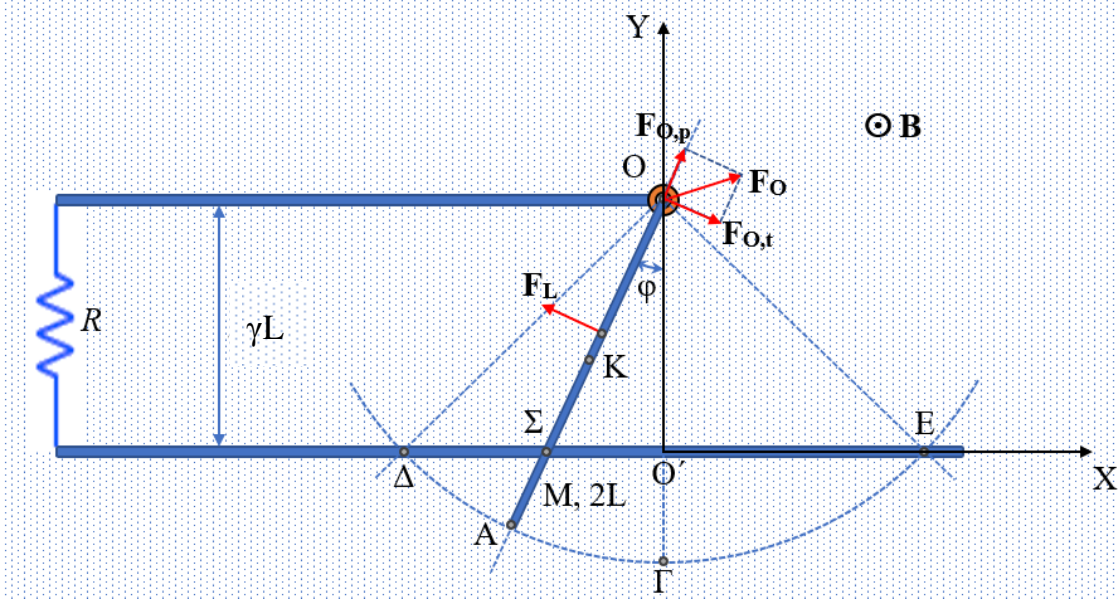
Για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας K έχουμε ότι



$$\rightarrow (+) : -F_L \cos \phi + F_{O,t} \cos \phi + F_{O,p} \sin \phi = Ma_{K,x} = M\ddot{x}_{K,x}$$

$$\uparrow (+) : F_L \sin \phi - F_{O,t} \sin \phi + F_{O,p} \cos \phi = Ma_{K,y} = M\ddot{y}_{K,y} \quad [53]$$

$$a_K = \sqrt{(a_{K,x})^2 + (a_{K,y})^2}$$



Η στιγμιαία θέση του κέντρου μάζας K είναι με βάση το παραπάνω σχήμα:

$$\left. \begin{array}{l} x_K = -L \sin \phi \\ y_K = \gamma L - L \cos \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x}_K = -L \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_K = L \sin \phi \dot{\phi} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ddot{x}_K = -L(-\sin \phi \dot{\phi}^2 + \cos \phi \ddot{\phi}) \\ \ddot{y}_K = L(\cos \phi \dot{\phi}^2 + \sin \phi \ddot{\phi}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ddot{x}_K = L \sin \phi \dot{\phi}^2 - L \cos \phi \ddot{\phi} \\ \ddot{y}_K = L \cos \phi \dot{\phi}^2 + L \sin \phi \ddot{\phi} \end{array} \right\} \quad [54]$$

Οπότε από τις εξ.[53] και [54] έχουμε ότι

$$-F_L \cos \phi + F_{O,t} \cos \phi + F_{O,p} \sin \phi = ML \sin \phi \dot{\phi}^2 - ML \cos \phi \ddot{\phi} \quad [55]$$

$$F_L \sin \phi - F_{O,t} \sin \phi + F_{O,p} \cos \phi = ML \cos \phi \dot{\phi}^2 + ML \sin \phi \ddot{\phi}$$

Από τις εξ.[55] περαιτέρω είναι

$$\left. \begin{array}{l} -F_L \cos \phi \sin \phi + F_{O,t} \cos \phi \sin \phi + F_{O,p} \sin^2 \phi = ML \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 - ML \sin \phi \cos \phi \ddot{\phi} \\ F_L \sin \phi \cos \phi - F_{O,t} \sin \phi \cos \phi + F_{O,p} \cos^2 \phi = ML \cos^2 \phi \dot{\phi}^2 + ML \cos \phi \sin \phi \ddot{\phi} \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)}$$

$$F_{O,p} = ML \dot{\phi}^2 \quad [56]$$

Από τις εξ.[48] και [52] έχουμε ότι

$$\left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 \cos \phi} \right\} F_L - F_{o,t} = \frac{1}{3} ML\ddot{\phi} \Rightarrow F_{o,t} = \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 \cos \phi} \right\} F_L - \frac{1}{3} ML\ddot{\phi} \quad [57]$$

$$\left. \begin{aligned} F_{o,t} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 \cos \phi} \right\} \frac{1}{\cos^3 \phi} \dot{\phi} - \frac{1}{3} ML\ddot{\phi} \\ F_{o,p} &= ML\dot{\phi}^2 \end{aligned} \right\}$$

Η εξ.[42] υπό την προσέγγιση ότι  $\lambda L \rightarrow 0$  ανάγεται στη μορφή

$$\ddot{\phi} = -\frac{3}{16} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 L^2}{MR} \dot{\phi} \rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{3}{16} \frac{\gamma^4}{\cos^4 \phi} \frac{B^2 L^2}{MR} \dot{\phi} \quad [58]$$

Περαιτέρω από τις εξ.[57] και [58] έχουμε ύστερα από μερικές πράξεις ότι

$$\left. \begin{aligned} F_{o,t} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 \cos \phi} \right\} \frac{1}{\cos^3 \phi} \dot{\phi} - \frac{1}{3} ML\ddot{\phi} \\ F_{o,p} &= ML\dot{\phi}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} F_{o,t} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 \cos \phi} \right\} \frac{1}{\cos^3 \phi} \dot{\phi} + \frac{1}{16} \frac{\gamma^4}{\cos^4 \phi} \frac{B^2 L^3}{R} \dot{\phi} \\ F_{o,p} &= ML\dot{\phi}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad [59]$$

$$\left. \begin{aligned} F_{o,t} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \frac{1}{\cos^3 \phi} \dot{\phi} - \frac{3}{16} \frac{B^2 L^3}{R} \frac{\gamma^4}{\cos^4 \phi} \dot{\phi} \\ F_{o,p} &= ML\dot{\phi}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_{o,t} &= \frac{B^2 L^3}{2R} \frac{\gamma^3}{\cos^3 \phi} \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{\gamma}{\cos \phi} \right] \dot{\phi} \\ F_{o,p} &= ML\dot{\phi}^2 \end{aligned} \right\}$$

Όταν η ράβδος συναντά κάθετα τον οδηγό επί του οποίου βαίνει στην περίπτωση μας είναι  $\phi = 0$ , οπότε από την εξ.[51] είναι

$$\omega(\phi = 0) = \frac{1}{8} \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \equiv \omega(0) \quad [60]$$

Οπότε από τις εξ.[59] και [60] είναι

$$\left. \begin{aligned} F_{o,t} &= \frac{B^2 L^3}{2R} \frac{\gamma^3}{\cos^3 \phi} \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{\gamma}{\cos \phi} \right] \dot{\phi} \\ F_{o,p} &= ML\dot{\phi}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_{o,t}(\phi = 0) &= \frac{B^2 L^3}{2R} \frac{\gamma^3}{\cos^3 \phi} \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{\gamma}{\cos \phi} \right] \frac{1}{8} \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \\ F_{o,p}(\phi = 0) &= ML \left[ \frac{1}{8} \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \right]^2 \end{aligned} \right\}$$

ή περαιτέρω

$$\left. \begin{aligned} F_{O,t}(\phi = 0) &= \frac{1}{16} \frac{1}{ML} \left( \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \right)^2 \left[ 1 - \frac{3}{8} \gamma \right] \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \\ F_{O,p}(\phi = 0) &= \frac{1}{64} \frac{1}{ML} \left( \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \right)^2 \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad [61]$$

και ύστερα από απλές πράξεις, τελικώς είναι

$$\tan \theta = \frac{F_{O,p}(\phi = 0)}{F_{O,t}(\phi = 0)} = \frac{\frac{1}{64} \frac{1}{ML} \left( \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \right)^2 \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right]^2}{\frac{1}{16} \frac{1}{ML} \left( \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \right)^2 \left[ 1 - \frac{3}{8} \gamma \right] \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \frac{\frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right]}{1 - \frac{3}{8} \gamma}, \quad 0 < \gamma < 2$$

$$F_o(\phi = 0) = \sqrt{[F_{O,t}(\phi = 0)]^2 + [F_{O,p}(\phi = 0)]^2} = \sqrt{[F_{O,t}(\phi = 0)]^2 + \tan^2 \theta [F_{O,t}(\phi = 0)]^2} = F_{O,t}(\phi = 0) \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \quad [62]$$

όπου η γωνία  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει η δύναμη άρθρωσης κατά τη στιγμή που μας ενδιαφέρει στην ουσία με τον οδηγό επί του οποίου βαίνει η ράβδος.

**Γ.** Για το υποερώτημα αυτό μπορούμε να εστιάσουμε είτε στην αμιγώς περιστροφική κίνηση της ράβδου περί την άρθρωση  $O$ , είτε στην κίνηση του κέντρου μάζας της  $K$  (η οποία όμως είναι σύνθετη κίνηση).

**1<sup>ος</sup> τρόπος:** Αμιγώς περιστροφική κίνηση της ράβδου περί το σημείο  $O$  (εξ.[48] και [60])

$$dW_{F_L} = -\tau_{F_L}(\phi) d\phi \Rightarrow \frac{dW_{F_L}}{dt} = -\tau_{F_L}(\phi) \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow P_{F_L}(\phi) = -\tau_{F_L}(\phi) \omega(\phi) \rightarrow$$

$$P_{F_L}(\phi = 0) = -\tau_{F_L}(\phi = 0) \omega(\phi = 0) = -(O\Sigma') F_L(\phi = 0) \omega(\phi = 0) \Rightarrow$$

$$P_{F_L}(\phi = 0) = -\frac{\gamma L}{2} \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \omega(0) \omega(0) \Rightarrow P_{F_L}(\phi = 0) = -\frac{1}{4} \frac{\gamma^4 B^2 L^4}{R} \omega^2(0)$$

$$P_{F_L}(\phi = 0) = -\frac{1}{4} \frac{\gamma^4 B^2 L^4}{R} \left\{ \frac{1}{8} \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \left[ 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right] \right\}^2 \Rightarrow$$

$$P_{F_L}(\phi = 0) = -\frac{1}{256} \gamma M L^2 \left( \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \right)^3 \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \left( 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right)^2 \quad [63]$$

όπου  $\Sigma'$  είναι το στιγμιαίο σημείο επαφής της ράβδου με τον οδηγό επί του οποίου βαίνει.

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** Σύνθετη κίνηση περί το κέντρο μάζας  $K$

$$dW_{F_L,rot} = \tau_{F_L}(\phi)d\phi \Rightarrow \frac{dW_{F_L,rot}}{dt} = \tau_{F_L}(\phi)\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow P_{F_L,rot}(\phi) = \tau_{F_L}(\phi)\omega(\phi) \rightarrow$$

$$P_{F_L,rot}(\phi = 0) = \tau_{F_L}(\phi = 0)\omega(\phi = 0) = (K\Sigma')F_L(\phi = 0)\omega(\phi = 0) \Rightarrow$$

$$P_{F_L,rot}(\phi = 0) = \left\{L - \frac{\gamma L}{2}\right\} \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^3}{R} \omega(0)\omega(0) \Rightarrow P_{F_L,rot}(\phi = 0) = \left\{1 - \frac{\gamma}{2}\right\} \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0)$$

[64]

και ακόμη, από τις εξ. [48] και [54] έχουμε ότι

$$dW_{F_L,tran} = F_{L,X}(\phi)dx_K + F_{L,Y}(\phi)dy_K \Rightarrow \frac{dW_{F_L,tran}}{dt} = F_{L,X}(\phi)\frac{dx_K}{dt} + F_{L,Y}(\phi)\frac{dy_K}{dt} \Rightarrow$$

$$P_{F_L,tran} = F_{L,X}(\phi)\{-L \cos \phi \dot{\phi}\} + F_{L,Y}(\phi)\{L \sin \phi \dot{\phi}\} \Rightarrow$$

$$P_{F_L,tran} = F_L(\phi) \cos \phi \{-L \cos \phi \dot{\phi}\} + F_L(\phi) \sin \phi \{L \sin \phi \dot{\phi}\} \Rightarrow$$

$$P_{F_L,tran} = -LF_L(\phi) \cos^2 \phi \dot{\phi} + LF_L(\phi) \sin^2 \phi \dot{\phi} \Rightarrow P_{F_L,tran} = LF_L(\phi) (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \dot{\phi} \rightarrow$$

$$P_{F_L,tran}(\phi = 0) = -LF_L(\phi = 0)\omega(0) \rightarrow P_{F_L,tran}(\phi = 0) = -\frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0)$$

[65]

Αθροίζοντας τις δύο συνεισφορές περί το κέντρο μάζας Κ έχουμε ότι

$$P_{F_L,tran}(\phi = 0) + P_{F_L,rot}(\phi = 0) = -\frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0) + \left\{1 - \frac{\gamma}{2}\right\} \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0) \Rightarrow$$

$$P_{F_L}(\phi = 0) = -\frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0) + \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0) - \frac{\gamma}{2} \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0) \Rightarrow$$

$$P_{F_L}(\phi = 0) = -\frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0) + \frac{1}{2} \frac{\gamma^3 B^2 L^4}{R} \omega^2(0) - \frac{1}{4} \frac{\gamma^4 B^2 L^4}{R} \omega^2(0) \Rightarrow$$

$$P_{F_L}(\phi = 0) = -\frac{1}{4} \frac{\gamma^4 B^2 L^4}{R} \omega^2(0)$$

[66]

Σημειώστε ότι τα αποτελέσματα με ‘κόκκινο χρώμα’ των εξ.[63] και [66] είναι συμβατά μεταξύ τους, συνεπώς τελικώς είναι

$$P_{F_L}(\phi = 0) = -\frac{1}{256} \gamma M L^2 \left( \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \right)^3 \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \left( 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right)^2 \quad [67]$$

Τέλος, για την ισχύ απωλειών λόγω φαινομένου Joule έχουμε από την εξ.[42] ότι

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\left( \cos \phi + \frac{\lambda \gamma L}{R} \right)} \frac{\gamma^4}{\cos^3 \phi} \frac{B^2 \omega^2 L^4}{R} \xrightarrow{\lambda L \rightarrow 0} \\ \frac{dE}{dt}(\phi) &\approx -\frac{1}{4} \frac{\gamma^4}{\cos^4 \phi} \frac{B^2 L^4}{R} \omega^2(\phi) \rightarrow \left. \frac{dE}{dt} \right|_{\phi=0} \approx -\frac{1}{4} \gamma^4 \frac{B^2 L^4}{R} \omega^2(0) \Rightarrow \quad [68] \\ \left. \frac{dE}{dt} \right|_{\phi=0} &\approx -\frac{1}{256} \gamma M L^2 \left( \frac{\gamma^3 B^2 L^2}{MR} \right)^3 \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \left( 2 + \frac{4}{\gamma^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Από τις εξ.[67] και [68] παρατηρούμε ότι η ισχύς των απωλειών λόγω φαινομένου Joule συμπίπτει με την ισχύ της δύναμης Laplace κατά την χρονική στιγμή κατά την οποία η ράβδος συναντά κάθετα τον οδηγό επί του οποίου βαίνει ... στην πραγματικότητα αυτή η ισότητα στιγμιαίων ισχύων ισχύει καθόλη τη διάρκεια της κίνησης της ράβδου (γιατί;).

### **ΤΕΛΟΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ**