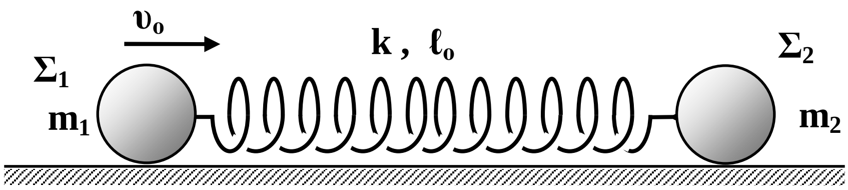
Δύο σώματα δεμένα σε ελατήριο



Τα σώματα $\mathbf{\Sigma_1}$ και $\mathbf{\Sigma_2}$ του σχήματος έχουν μάζες $\mathbf{m_1}$ και $\mathbf{m_2}$ αντίστοιχα και ισορροπούν δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς **k** πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Ο άξονας του ελατηρίου είναι οριζόντιος και διέρχεται από τα κέντρα μάζας των σωμάτων. Κάποια στιγμή και ενώ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το $\mathbf{\Sigma_1}$ εκτοξεύεται προς το $\mathbf{\Sigma_2}$ με ταχύτητα μέτρου $\mathbf{\upsilon_o}$. Να μελετήσετε τις κινήσεις των δύο σωμάτων και να υπολογίσετε τη μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{\upsilon_1}$ και $\mathbf{\upsilon_2}$ (αλγεβρικά) ***τις ταχύτητες των δύο σωμάτων ως προς το δάπεδο***, τότε αρχικά είναι $\boxed{\upsilon_1 = \upsilon_o}$ και $\boxed{\upsilon_2 = 0}$.

(i) Αμέσως μετά την έναρξη, το σώμα $\mathbf{m_1}$ θα αρχίσει να συμπιέζει το ελατήριο και η $\mathbf{\upsilon_1}$ θα μειώνεται, ενώ η $\mathbf{\upsilon_2}$ του σώματος $\mathbf{m_2}$ θα αυξάνεται. Το ελατήριο αποκτά τη ***μέγιστη συσπείρωση*** $\boldsymbol{\Delta\ell_{max}}$ όταν $\boxed{\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_\kappa}$ τη στιγμή δηλαδή που εξισώνονται οι δύο ταχύτητες:

$$\mathbf{p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{m_1 \cdot \upsilon_o = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon_\kappa} \quad \rightarrow \quad \boxed{\upsilon_K = \frac{m_1 \upsilon_0}{m_1 + m_2}}$$

(ii) Τη στιγμή που επανακτά το ***φυσικό του μήκος*** $\boldsymbol{\ell_o}$, οι τιμές των δύο ταχυτήτων θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}} \\ \mathbf{K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}} \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \boxed{\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0} \quad \text{και} \quad \boxed{\upsilon_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}$$

(iii) Στη συνέχεια το ελατήριο επιμηκύνεται και αποκτά ***μέγιστη επιμήκυνση*** $\boldsymbol{\Delta\ell_{max}}$ όταν εξισώνονται πάλι οι δύο ταχύτητες $\boxed{\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_\kappa}$.

(iv) Τέλος, ***επανέρχεται ξανά στο φυσικό του μήκος***, οι ταχύτητες αποκτούν πάλι τις αρχικές τους τιμές $\boxed{\upsilon_1 = \upsilon_o}$ και $\boxed{\upsilon_2 = 0}$ και επαναλαμβάνεται περιοδικά το ίδιο από την αρχή.

Λόγω διατήρησης της ορμής, το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων κινείται με σταθερή ταχύτητα: $\boxed{\upsilon_{CM} = \frac{m_1 \upsilon_0}{m_1 + m_2}}$

(*Η ταχύτητα αυτή συμπίπτει προφανώς με την κοινή ταχύτητα* $\boldsymbol{\upsilon_\kappa}$ *των δύο σωμάτων τις στιγμές που η παραμόρφωση του ελατηρίου γίνεται μέγιστη*).

Με σύστημα αναφοράς το κέντρο μάζας τώρα, τα δύο σώματα εκτελούν ΓΑΤ με ταχύτητες έστω $\mathbf{V_1}$ και $\mathbf{V_2}$, που έχουν διαρκώς αντίθετες φορές. Τα σώματα περνούν από τις Θ.Ι. τις στιγμές που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, και φτάνουν στις ακραίες θέσεις όταν το ελατήριο έχει μέγιστη παραμόρφωση (συσπείρωση ή επιμήκυνση).

Για τις ταχύτητες ταλάντωσης $\mathbf{V_1}$ και $\mathbf{V_2}$ ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{V_1 = \upsilon_1 - \upsilon_{CM}}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{V_2 = \upsilon_2 - \upsilon_{CM}}}$$

και με αντικατάσταση έχουμε:

(Α) Στις ακραίες θέσεις όπου είναι $\mathbf{V_1 = V_2 = 0}$:

$$\boxed{\mathbf{0 = \upsilon_\kappa - \upsilon_{CM}}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{0 = \upsilon_\kappa - \upsilon_{CM}}} \quad \text{(αναμενόμενο)}$$

(Β) Στις θέσεις ισορροπίας:

1η επαναφορά στο $\boldsymbol{l_o}$:

$$\boxed{\mathbf{-V_{1max} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{-V_{1max} = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0}}$$

και:

$$\boxed{\mathbf{+V_{2max} = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{+V_{2max} = \frac{+m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}}$$

2η επαναφορά στο $\boldsymbol{l_o}$:

$$\boxed{\mathbf{+V_{1max} = \upsilon_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{+V_{1max} = \frac{+m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0}}$$

και:

$$\boxed{\mathbf{-V_{2max} = 0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{-V_{2max} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}}$$

Δηλαδή τελικά οι μέγιστες τιμές των ταχυτήτων των δύο ΓΑΤ είναι:

$$\boxed{\mathbf{V_{1max} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{V_{2max} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0}}$$

Αφού οι δύο ΓΑΤ γίνονται στο σύστημα κέντρου μάζας, η σπείρα του ελατηρίου που είναι πάνω στο CM θα «παραμένει ακίνητη» και το ελατήριο θα χωρίζεται νοητά σε δύο τμήματα ℓ_1, ℓ_2 με σταθερές k_1 και k_2 και καθένα από αυτά θα «προκαλεί» την ΓΑΤ του αντίστοιχου σώματος.

Η τάση **T** στο κάθε σώμα παίζει ρόλο δύναμης επαναφοράς και αν είναι x_1, x_2 οι απομακρύνσεις των ΓΑΤ και $\Delta\ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου, ισχύει:

$|\Delta\ell| = |x_1| + |x_2| \rightarrow \frac{T}{k} = \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_2} \rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{m_1 \cdot \omega^2} + \frac{1}{m_2 \cdot \omega^2}$ όπου ω η (κοινή) κυκλική συχνότητα των δύο ΓΑΤ. Τελικά προκύπτει:

$$\boxed{\omega = \sqrt{k \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}}$$

Αν τώρα τα πλάτη των δύο ΓΑΤ είναι A_1, A_2 τότε η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου βγαίνει:

$|\Delta\ell_{max}| = A_1 + A_2 = \frac{V_{1max} + V_{2max}}{\omega}$ και με αντικατάσταση:

$$\boxed{|\Delta\ell_{max}| = \upsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{k \cdot (m_1 + m_2)}}}$$

Αν τα σώματα έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$, τότε προκύπτει:

$$\boxed{|\Delta\ell_{max}| = \upsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot k}}}$$