Υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσια μονάδων

Υποπολλαπλάσια			Πολλαπλάσια		
ντεσι–	**d**	10^{-1}			
σεντι–	**c**	10^{-2}			
μιλλι–	**m**	10^{-3}	κιλο–	**K**	10^{3}
μικρο–	**μ**	10^{-6}	μεγα–	**M**	10^{6}
νανο–	**n**	10^{-9}	γιγα–	**G**	10^{9}
πικο–	**p**	10^{-12}	τερα–	**T**	10^{12}

Λίγη τριγωνομετρία

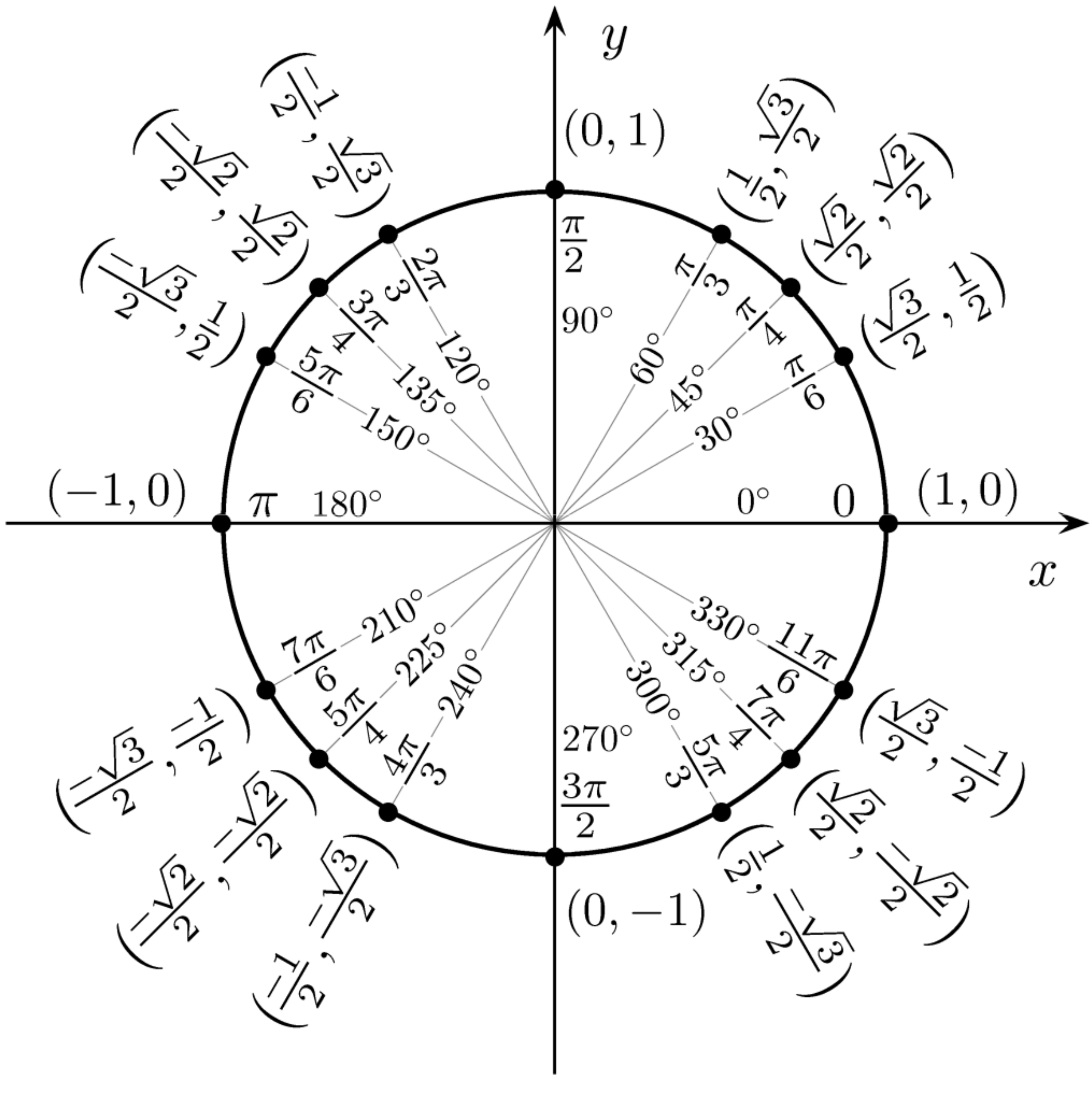
Ταυτότητες:	$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$	$\varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$	$\sigma\phi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$	$\varepsilon\phi\theta = \frac{1}{\sigma\phi\theta}$

Ορθογώνιο τρίγωνο	$\eta\mu\theta = \frac{\text{απέν. κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$	$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\text{προσκ. κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$	$\varepsilon\phi\theta = \frac{\text{απέν. κάθετη}}{\text{προσκ. κάθετη}}$

Τυχαίο τρίγωνο	Νόμος ημιτόνων $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$	Νόμος συνημιτόνων $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A$ *(κλπ.)*

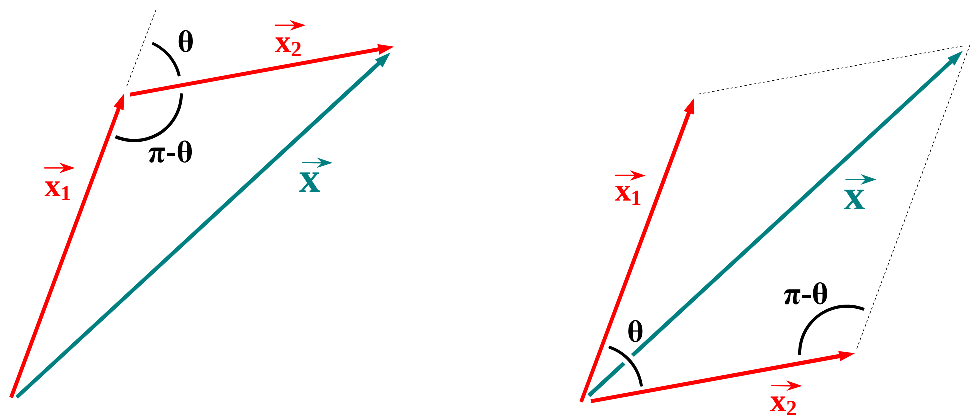
Διπλάσιο τόξο	$\eta\mu 2\theta = 2\cdot\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$	$\sigma\upsilon\nu 2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta$ $\sigma\upsilon\nu 2\theta = 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 = 1 - 2\cdot\eta\mu^2\theta$
Απο-τετραγωνισμός	$\eta\mu^2\theta = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}$

Άθροισμα ημιτόνων σε γινόμενο	$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\cdot\eta\mu\frac{A+B}{2}$



y
x
$(0,1)$
$(1,0)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\frac{\pi}{4}$ 45°
$\frac{\pi}{6}$ 30°
0 0°
$\frac{2\pi}{3}$ 120°
$\frac{3\pi}{4}$ 135°
$\frac{5\pi}{6}$ 150°
π 180°
$\frac{7\pi}{6}$ 210°
$\frac{5\pi}{4}$ 225°
$\frac{4\pi}{3}$ 240°
270° $\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$ 300°
$\frac{7\pi}{4}$ 315°
$\frac{11\pi}{6}$ 330°

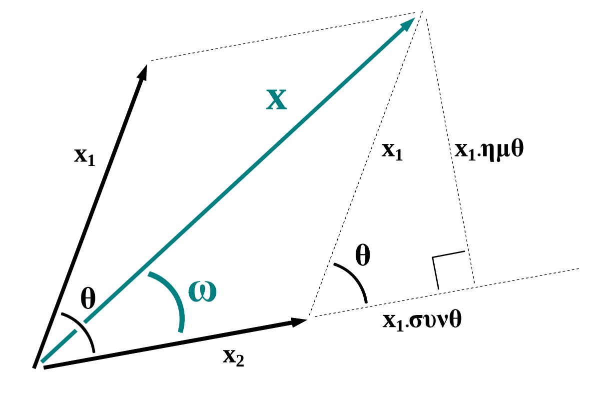
Πρόσθεση – αφαίρεση διανυσμάτων

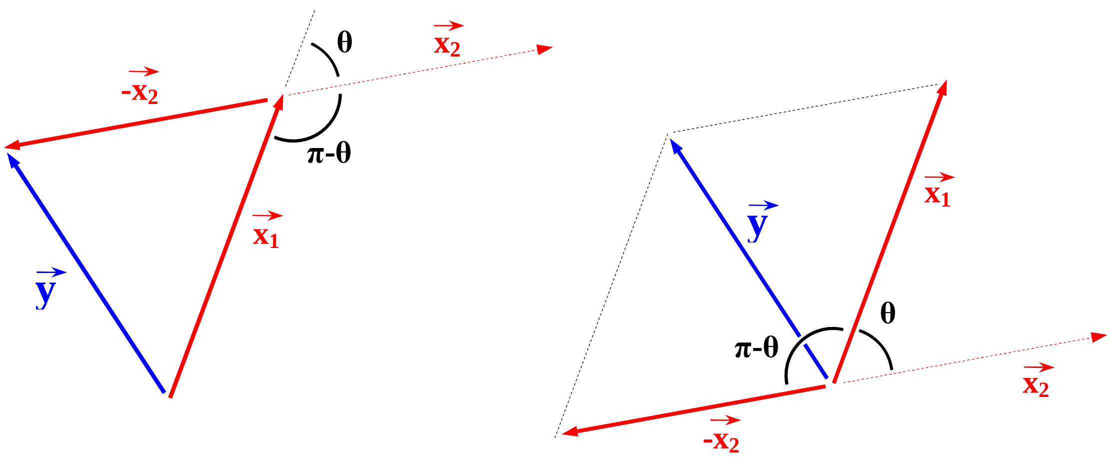


Πρόσθεση: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

$$x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{x_1\eta\mu\theta}{x_2 + x_1\sigma\upsilon\nu\theta}$$



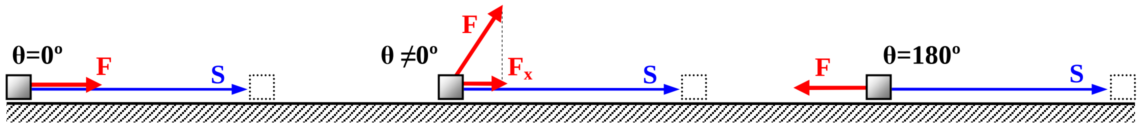


Αφαίρεση: $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{x}_1 + (-\vec{x}_2)$

Έργο δύναμης

Έργο = (Δύναμη) · (Μετατόπιση)

Έργο σταθερής δύναμης:

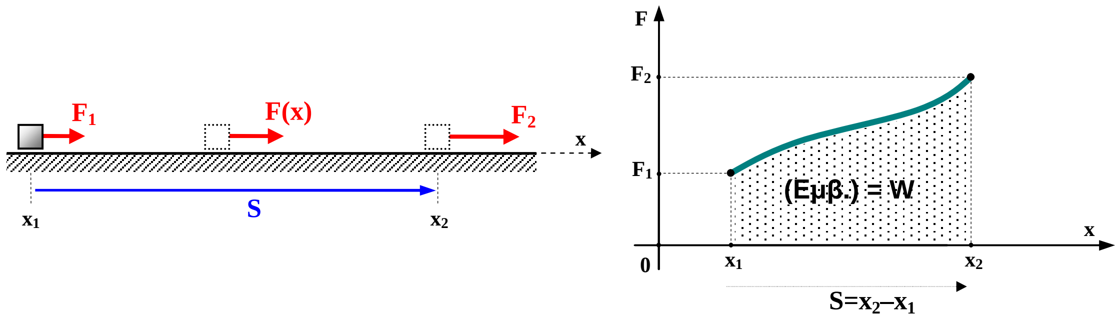


$W = F \cdot S$ $W = F_x \cdot S$ $W = -F \cdot S$

$$W = F \cdot S \cdot συνθ$$

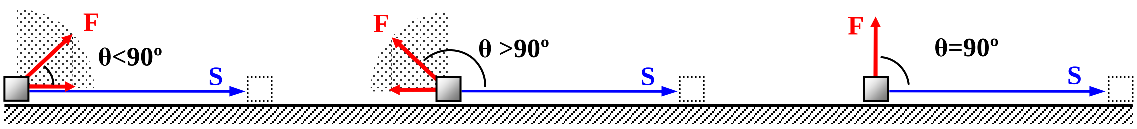
$$0^o \le θ \le 180^o$$

Έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου:



$W_{1\to2}$ = (Εμβ.) *της συνάρτησης* ***F(x)****, από* x_1 *έως* x_2

Πρόσημο του έργου:



$W > 0$ $W < 0$ $W = 0$

Η δύναμη «***παράγει έργο***», **συμβάλλει στη μετατόπιση** του σώματος και **μεταφέρει ενέργεια** σ' αυτό.	Η δύναμη «***δαπανά έργο***», **αντιστέκεται στη μετατόπιση** του σώματος και **αφαιρεί ενέργεια** από αυτό.	Η δύναμη **δεν συμμετέχει** στη μετατόπιση του σώματος και **δεν του μεταβάλλει** την κινητική του ενέργεια.

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ)

Όταν ένα σώμα μετατοπίζεται, γενικά οι δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό μεταβάλλουν την κινητική του ενέργεια.

Η μεταβολή ΔΚ της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι ίση με το συνολικό έργο $W_{ολ}$ των δυνάμεων που ασκήθηκαν σ' αυτό κατά τη διάρκεια της κίνησής του.

Με άλλα λόγια η *μεταβολή της κινητικής του ενέργειας είναι ίση με την συνολική ενέργεια που ανταλλάσσει το σώμα με το περιβάλλον του*, μέσω του έργου των δυνάμεων που ασκήθηκαν σ' αυτό.

Δηλαδή: $$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W$$

Το ΘΜΚΕ ισχύει για κάθε είδους δυνάμεις και εκφράζει τη διατήρηση συνολικά της ενέργειας στη φύση, ανεξάρτητα από τις μορφές με τις οποίες εμφανίζεται.

Συντηρητικές δυνάμεις – Μηχανική ενέργεια

Κάποιες από τις δυνάμεις που συναντάμε στη φύση έχουν την ιδιότητα, όταν μεταφέρουν ενέργεια από ένα σώμα ή σύστημα σε άλλο, να μην την υποβαθμίζουν ποιοτικά αλλά να τη διατηρούν σε μορφές που να μπορούν να «αποθηκευτούν αναλλοίωτες». (Σκεφτείτε π.χ. την ενέργεια του νερού σε ένα υδροηλεκτρικό φράγμα, τη χημική ενέργεια των καυσίμων, την ενέργεια ενός συμπιεσμένου ελατηρίου, κλπ.).

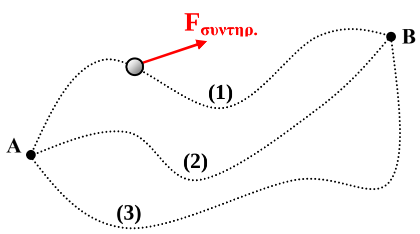
Τέτοιες δυνάμεις είναι π.χ. οι **βαρυτικές**, οι **ηλεκτροστατικές** και οι δυνάμεις **ελαστικών παραμορφώσεων** και τους δώσαμε τη γενική ονομασία «**συντηρητικές δυνάμεις**».

Στον αντίποδα βρίσκονται οι «**μη συντηρητικές δυνάμεις**» όπως οι ηλεκτρομαγνητικές, η τριβή, η αντίσταση του αέρα, κλπ. Για παράδειγμα οι κάθε είδους τριβές διασκορπίζουν την ενέργεια στο περιβάλλον με μορφή θερμικής ενέργειας που είναι αδύνατο να ανακτηθεί.

Ορισμός:

Ονομάζονται συντηρητικές οι δυνάμεις που το έργο τους κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής είναι μηδέν: **F συντηρητική** $\leftrightarrow$ $\mathbf{W_{\varnothing} = 0}$

Ιδιότητες:



1. Το έργο συντηρητικής δύναμης από ένα σημείο Α σε άλλο Β είναι *ανεξάρτητο της διαδρομής* (ΑΒ) και εξαρτάται μόνο από τις θέσεις Α και Β:

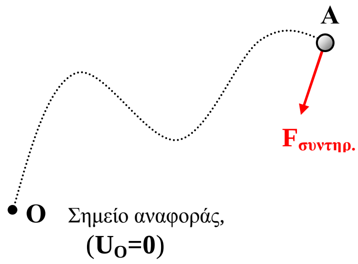
   $$W_{1,\,A\to B} = W_{2,\,A\to B} = \ldots = σταθ. = W_{A\to B}$$

2. Η ικανότητα παραγωγής έργου των συντηρητικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα, αποτελεί την *δυναμική ενέργεια* που

περικλείεται σ' αυτό. Η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από τη θέση ή την κατάσταση του συστήματος.

3. Το άθροισμα *<u>δυναμικής</u>* και *<u>κινητικής</u>* ενέργειας ονομάζεται *<u>μηχανική ενέργεια</u>* του συστήματος. Αν στο σύστημα ασκούνται συντηρητικές μόνο δυνάμεις, ή μηχανική του ενέργεια παραμένει σταθερή (*<u>αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας</u>*).

Δυναμική ενέργεια, U_A



Είναι η ικανότητα παραγωγής έργου που έχει ένα σύστημα σε μια θέση ή κατάσταση Α εξαιτίας της δράσης μιας συντηρητικής δύναμης, σε σχέση με κάποια άλλη θέση ή κατάσταση αναφοράς Ο (για την οποία δεχόμαστε ότι U_O=0):

$$\boxed{U_A = W_{συντηρ.\ A\to O}}$$

Εναλλακτικά, **μπορούμε να περιγράψουμε την δυναμική ενέργεια U_A ενός συστήματος ως την ενέργεια που προσφέραμε μέσω κάποιου εξωτερικού έργου για φέρουμε το σύστημα από την κατάσταση αναφοράς Ο στην κατάσταση Α**.

$$\boxed{U_A = W_{εξωτερ.\ O\to A}}$$

Το σύστημα, στη νέα του κατάσταση, έχει αποθηκεύσει με μορφή δυναμικής ενέργειας την ενέργεια που του δόθηκε και είναι ικανό να την αποδώσει πάλι μέσω έργου αν επιστρέψει στην αρχική κατάσταση αναφοράς.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

(i) <u>Βαρυτική δυναμική ενέργεια</u>

Σώμα έχει βάρος **mg** και βρίσκεται σε κάποιο σημείο Α, σε ύψος **Η** πάνω από το έδαφος. Με <u>σημείο αναφοράς το έδαφος</u>, η δυναμική ενέργεια είναι:

$$\boxed{U_A = W_{βάρους,\ A\to έδαφος} = mg\cdot H}$$

(ii) <u>Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια (ενέργεια ηλεκτροστατικού πεδίου)</u>

Φορτίο **q** βρίσκεται σε σημείο Α ηλεκτροστατικού πεδίου, όπου το δυναμικό είναι V_A. Με <u>σημείο αναφοράς το άπειρο</u>, η δυναμική ενέργεια είναι:

$$\boxed{U_A = W_{ηλ.πεδίου,\ A\to\infty} = V_A\cdot q}$$

(iii) <u>Δυναμική ενέργεια παραμορφωμένου ελατηρίου:</u>

Όταν ένα ελατήριο είναι συμπιεσμένο ή τεντωμένο ασκεί μια δύναμη στο χέρι μας ή σε ότι άλλο το εμποδίζει να επανέλθει στη φυσική του κατάσταση. Η δύναμη αυτή ονομάζεται τάση του ελατηρίου (**Τ** ή $F_{ελ.}$) και είναι συντηρητική. Έτσι, με κατάσταση αναφοράς το φυσικό του μήκος, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$\boxed{U_{ελατηρ.} = W_{τάσης\ μέχρι\ το\ φυσικό\ μήκος} = \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot \Delta l^2}$$

όπου **k** είναι η σταθερά (σκληρότητα) του ελατηρίου και Δl η αρχική του παραμόρφωση.

Σχέση έργου συντηρητικής δύναμης και δυναμικής ενέργειας

$$\boxed{W = U_{αρχ.} - U_{τελ.}} \quad \text{ή αλλιώς:} \quad \boxed{W = -(U_{τελ.} - U_{αρχ.}) = -\Delta U}$$

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ)

Η ΑΔΜΕ είναι μια εναλλακτική μορφή του ΘΜΚΕ, αν βέβαια στο σύστημά μας ασκούνται συντηρητικές μόνο δυνάμεις.

Πράγματι: $K_{τελ.} - K_{αρχ.} = \Sigma W \;\rightarrow\; K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_{συντηρ.} + W_{μη\ συντηρ.}$

Αν ασκούνται συντηρητικές μόνο δυνάμεις, τότε:

$K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_{συντηρ.} \;\rightarrow\; K_{τελ.} - K_{αρχ.} = U_{αρχ.} - U_{τελ.}$ και τελικά προκύπτει:

$$\boxed{U_{τελ.} + K_{τελ.} = U_{αρχ.} + K_{αρχ.}} \quad \text{ή αλλιώς} \quad \boxed{E_{τελ.} = E_{αρχ.}}$$

Ισχύς δύναμης

Ισχύς **P** μιας δύναμης είναι ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη παράγει (ή καταναλώνει) έργο.

Όπως κάθε ρυθμός, έτσι και η ισχύς, διακρίνεται σε μέση ισχύ P_M, και στιγμιαία ισχύ **P**:

Μέση ισχύς:

Αν μια δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο **W** μέσα σε κάποιο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$, τότε η μέση ισχύς της είναι το πηλίκο:

$$\boxed{P_M = \frac{W}{\Delta t}} \quad \text{ή} \quad \boxed{P_M = \frac{W}{t_2 - t_1}}$$

Δηλ. η P_M είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής έργου στο χρόνο Δt (αφού διαιρούμε με το χρόνο αυτό).

Στιγμιαία ισχύς:

Η στιγμιαία ισχύς (**ή απλά, ισχύς**) μιας δύναμης είναι ο στιγμιαίος ρυθμός παραγωγής έργου της δύναμης αυτής, δηλαδή ο ρυθμός παραγωγής έργου οποιαδήποτε στιγμή:

$$\boxed{P = \left(\frac{dW}{dt}\right)} \quad (\textit{ορισμός})$$

Το **dt** εδώ συμβολίζει ένα πολύ μικρό (απειροστό, δηλ. σχεδόν μηδενικό) χρονικό διάστημα και το **dW** συμβολίζει το επίσης πολύ μικρό (απειροστό) έργο που παράγει η δύναμη στον χρόνο **dt**.

Προφανώς τα **dW** και **dt** δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αριθμητικά (αφού είναι σχεδόν μηδενικά). Έτσι εργαζόμαστε ως εξής:

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\mathbf{dW}}{\mathbf{dt}}\right) = \left(\frac{\mathbf{F \cdot dx}}{\mathbf{dt}}\right) = \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{P = F \cdot \upsilon}}$$

Χρησιμοποιούμε δηλ. για τη στιγμιαία ισχύ το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$.

$$\boxed{\text{Ισχύς} = (\text{Δύναμη}) \cdot (\text{Ταχύτητα})}$$

(και γενικότερα: $\boxed{\mathbf{P = F \cdot \upsilon \cdot συνθ}}$ όπου $\boldsymbol{\theta}$ η γωνία μεταξύ των $\vec{\mathbf{F}}$ και $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(1) Αν η ισχύς παραμένει σταθερή τότε η μέση και η στιγμιαία τιμή της είναι ίδιες, οπότε μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε από τις δύο μας διευκολύνει.

(Αυτό ισχύει γενικότερα για οποιοδήποτε ρυθμό, αν παραμένει σταθερός).

(2) Επειδή το έργο μιας δύναμης εκφράζει μεταφορά και μετατροπή ενέργειας, οποιοσδήποτε ρυθμός μετατροπής, μεταφοράς, απώλειας, κλπ. κάποιας μορφής ενέργειας σχετίζεται με την ισχύ κάποιας δύναμης (1 Watt → 1 Joule/sec).

Παραδείγματα τέτοιων ρυθμών είναι:

- Ο ρυθμός με τον οποίο (πόσο γρήγορα) προσφέρει ενέργεια μια εξωτερική δύναμη:

$$\left(\frac{\mathbf{dW_{ΕΞΩΤ}}}{\mathbf{dt}}\right) = \mathbf{P_{ΕΞΩΤ}} = \mathbf{F_{ΕΞΩΤ}} \cdot \boldsymbol{\upsilon}$$

- Ο ρυθμός με τον οποίο αποβάλλεται θερμότητα εξ αιτίας της τριβής **Τ**:

$$\left(\frac{\mathbf{dQ}}{\mathbf{dt}}\right) = \left(\frac{|\mathbf{dW_{ΤΡΙΒΗΣ}}|}{\mathbf{dt}}\right) = |\mathbf{P_{ΤΡΙΒΗΣ}}| = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\upsilon}$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας όταν ένα σώμα πέφτει:

$$\left(\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}}\right) = \left(\frac{-\mathbf{dW_{ΒΑΡΟΥΣ}}}{\mathbf{dt}}\right) = -\mathbf{P_{ΒΑΡΟΥΣ}} = -\mathbf{mg} \cdot \boldsymbol{\upsilon}$$

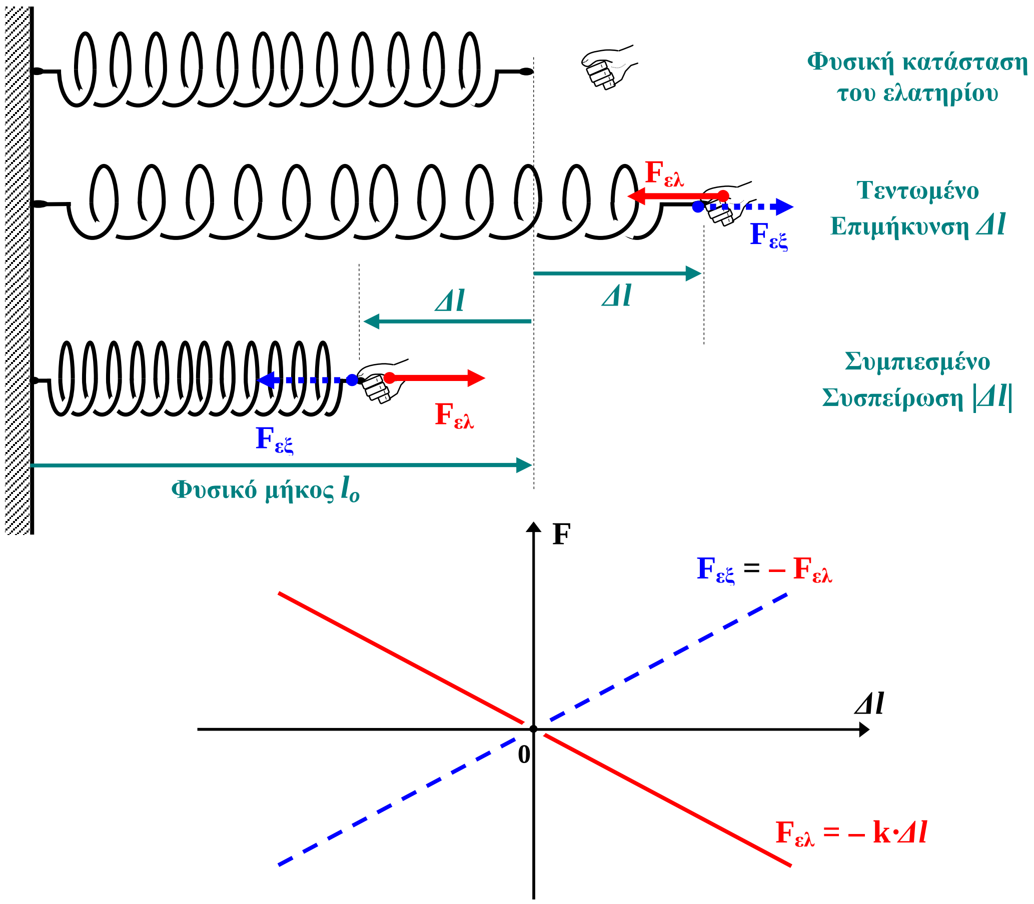
- Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του σώματος:

(Θυμηθείτε το ΘΜΚΕ: $\mathbf{\Delta K = W_{ολ}}$ και επομένως $\mathbf{dK = dW_{ολ}}$)

$$\left(\frac{\mathbf{dK}}{\mathbf{dt}}\right) = \left(\frac{\mathbf{dW_{ΟΛ}}}{\mathbf{dt}}\right) = \mathbf{P_{ΟΛ}} = \mathbf{F_{ΟΛ}} \cdot \boldsymbol{\upsilon}$$ (όπου $\mathbf{F_{ολ}}$ το μέτρο της συνισταμένης δύναμης)

Ελατήρια – Νόμος Hooke – Έργο τάσης και δυναμική ενέργεια ελατηρίου

Νόμος του Hooke



Στο 1^{ο} σχήμα φαίνεται ένα ελατήριο στο φυσικό του μήκος $\boldsymbol{l_o}$. Αν με το χέρι μας τραβήξουμε ή σπρώξουμε την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου, το μήκος του θα αλλάξει. Αν το νέο μήκος είναι $\boldsymbol{l}$, η μεταβολή $\boldsymbol{Δl = l – l_o}$ αποτελεί τη *παραμόρφωση* του ελατηρίου, *επιμήκυνση* ($Δl > 0$) ή *συσπείρωση – συμπίεση* ($Δl < 0$).

Στο 2^{ο} σχήμα έχουμε τραβήξει προς τα δεξιά την άκρη του ελατηρίου και το κρατάμε τεντωμένο. Έτσι, το μήκος του έχει αυξηθεί κατά $Δl$. ($Δl > 0$)

Στο 3^{ο} σχήμα έχουμε σπρώξει προς τα αριστερά την άκρη του ελατηρίου και το κρατάμε συμπιεσμένο. Έτσι, το μήκος του έχει μειωθεί κατά $|Δl|$. ($Δl < 0$)

Για να παραμορφώσουμε το ελατήριο του ασκούμε με το χέρι μας μια δύναμη $\mathbf{F_{εξ}}$. Το ελατήριο (όπως και κάθε ελαστικό σώμα) αντιστέκεται στην παραμόρφωση αυτή ασκώντας στο χέρι μας μια δύναμη $\mathbf{F_{ελ}}$ που λέγεται τάση του ελατηρίου.

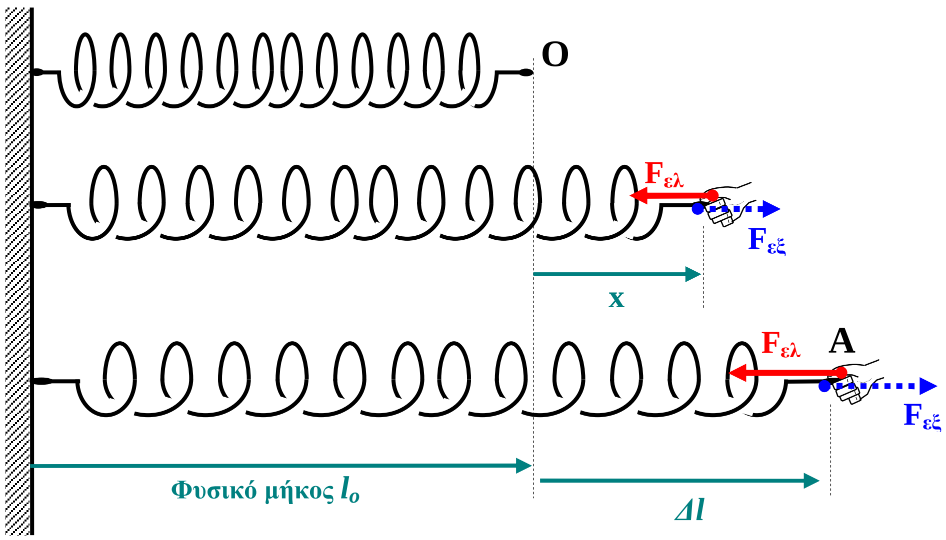
Η τάση του ελατηρίου αποτελεί την **αντίδραση** του ελατηρίου στη δύναμη που του ασκούμε εμείς: $\boxed{\mathbf{F_{εξ} = – F_{ελ}}}$ (δράση – αντίδραση)

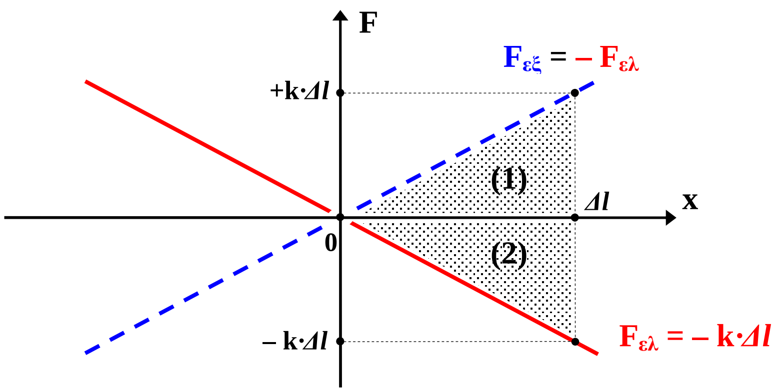
Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke, **η δύναμη με την οποία το ελατήριο αντιστέκεται στη μεταβολή του μήκους του, είναι ανάλογη με τη μεταβολή αυτή και έχει αντίθετη φορά**.

Αλγεβρικά ο νόμος του Hook γράφεται: $\boxed{\mathbf{F_{ελ} = -k \cdot \Delta l}}$

Προφανώς η τάση του ελατηρίου είναι μεταβλητή δύναμη.

Έργο τάσης και δυναμική ενέργεια ελατηρίου





Για να παραμορφώσουμε ένα ελατήριο κατά Δl (βλέπε σχήμα, από Ο σε Α) πρέπει να ασκούμε με το χέρι μας <u>εξωτερική δύναμη</u> όλο και πιο μεγάλη καθώς μετατοπίζουμε το άκρο του ελατηρίου. Η δύναμη αυτή παράγει έργο που δίνεται γραφικά από το εμβαδό (1):

$$\mathbf{W_{εξωτ.\, O\to A} = \tfrac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta l^2}$$

Μέσω του έργου αυτού προσφέρουμε ενέργεια στο ελατήριο που αποθηκεύεται με μορφή δυναμικής ενέργειας ελαστικής παραμόρφωσης.

<u>*Εναλλακτικά, μπορούμε να περιγράψουμε το ίδιο φαινόμενο*</u> παρατηρώντας την τάση του ελατηρίου. Κατά τη μετακίνηση Ο → Α η <u>τάση του ελατηρίου</u> αντιστέκεται και καταναλώνει έργο, που δίνεται γραφικά από το εμβαδό (2):

$$\mathbf{W_{τάσης,\, O\to A} = -\tfrac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta l^2}$$

Με τον τρόπο αυτό η τάση παίρνει ενέργεια από το χέρι μας, που την μετατρέπει σε δυναμική ενέργεια (και μπορεί να την αποδώσει πάλι αν το ελατήριο επανέλθει στη φυσική του κατάσταση).

Τελικά, ένα ελατήριο που είναι παραμορφωμένο κατά Δl σε σχέση με το φυσικό του μήκος, περικλείει **δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης**:

$$U_A = W_{\varepsilon\xi\omega\tau.\ O\to A} = W_{\tau\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma,\ A\to O} = \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot \Delta l^2$$

$$\boxed{U = \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot \Delta l^2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η τάση του ελατηρίου <u>παράγει έργο όταν το ελατήριο επανέρχεται</u> προς το φυσικό του μήκος και <u>καταναλώνει έργο όταν αυξάνεται η παραμόρφωση</u> του ελατηρίου, απομακρύνεται δηλαδή από το φυσικό του μήκος.
2. Η δυναμική ενέργεια ενός ελατηρίου είναι πάντα θετική.
3. Το έργο της τάσης του ελατηρίου <u>ανάμεσα σε δύο τυχαίες θέσεις</u> Α, Β, όπου το ελατήριο είναι αντίστοιχα παραμορφωμένο κατά Δl_A και Δl_B (τεντωμένο ή συμπιεσμένο), δίνεται <u>αλγεβρικά</u> από τη σχέση:

$$\boxed{W_{\tau\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma,\ A\to B} = U_A - U_B} \rightarrow \boxed{W_{\tau\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma,\ 1\to 2} = \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot \Delta l_A^{\,2} - \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot \Delta l_B^{\,2}}$$

4. Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε το έργο της τάσης γραφικά από το σχετικό εμβαδό στη γραφική παράσταση τάσης – μετατόπισης (εμβαδό τραπεζίου ή διαφορά δύο τριγώνων). Προσοχή όμως τότε στο <u>πρόσημο</u> του αντίστοιχου έργου (βλέπε 1$^{\eta}$ παρατήρηση).

Οι νόμοι του Newton – Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής – Ορμή – Γενίκευση του θεμελιώδους νόμου – Αρχή διατήρησης της ορμής

Οι νόμοι του Newton

Οι δυνάμεις – οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωμάτων – είναι οι αιτίες που προκαλούν οποιαδήποτε μεταβολή στην κινητική τους κατάσταση.

Μόνο με την επίδραση κατάλληλης δύναμης θα εξαναγκαστεί ένα σώμα να κινηθεί πιο γρήγορα ή πιο σιγά, να αλλάξει κατεύθυνση ή να διαγράψει καμπυλόγραμμη τροχιά, να κάνει ταλάντωση, να πέσει, ή οτιδήποτε άλλο.

Στη συνέχεια αγνοούμε τις διαστάσεις των σωμάτων και τα θεωρούμε σαν υλικά σημεία.

Αν δεν ασκείται δύναμη στο σώμα (ή αν $\Sigma\vec{F} = 0$), τότε αυτό θα συνεχίσει να κάνει ότι έκανε, θα παραμένει δηλαδή ακίνητο ή θα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

Ο **1ος νόμος του Newton**, ή νόμος της αδράνειας, περιγράφει αυτή ακριβώς την ιδιότητα των σωμάτων:

Νόμος της αδράνειας: $\boxed{\Sigma\vec{F} = 0 \leftrightarrow \vec{\upsilon} = \text{σταθ.}}$

Ο **2ος νόμος του Newton**, ή θεμελιώδης νόμος της μηχανικής, περιγράφει την σχέση αιτίας – αποτελέσματος: Οι δυνάμεις μεταβάλλουν το μέτρο ή την κατεύθυνση της ταχύτητας, προκαλούν επιτάχυνση ανάλογη με τη δύναμη:

Θεμελιώδης νόμος μηχανικής: $\boxed{\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha}}$

Τέλος, ο **3ος νόμος του Newton**, ή αρχή δράσης – αντίδρασης, μας περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο δύο σώματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους:

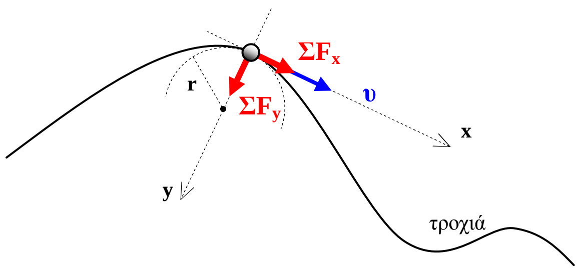
Αρχή δράσης – αντίδρασης: $\boxed{\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}}$

Ο 2ος νόμος – Η περιγραφή της κίνησης του σώματος

Αν θεωρήσουμε τον φορέα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ ως x άξονα και αναλύσουμε τη διανυσματική σχέση $\boxed{\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha}}$ σε κάθετους **x**, **y** άξονες τότε προκύπτουν τα εξής:

$$\boxed{\Sigma F_x = m\cdot\alpha_\varepsilon}$$

$$\boxed{\Sigma F_y = m\cdot\alpha_\kappa}$$



όπου α_ε η **επιτρόχια επιτάχυνση**, υπεύθυνη για την αλλαγή του **μέτρου** της ταχύτητας και α_κ η **κεντρομόλος επιτάχυνση**, υπεύθυνη για την αλλαγή της **διεύθυνσης** της ταχύτητας.

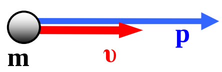
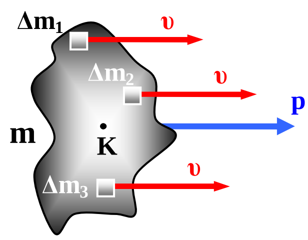
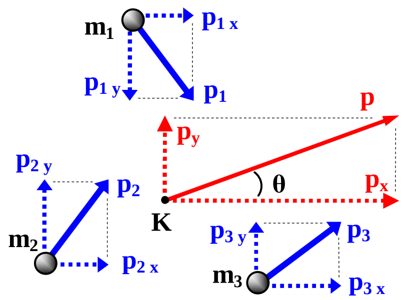
Για την α_κ ισχύει: $\boxed{\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{r}}$ όπου **r** η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.

Με εξαίρεση την ελικοειδή κίνηση που συναντάμε στο μαγνητικό πεδίο και είναι μια ειδική περίπτωση, όλες οι κινήσεις στα πλαίσια της ύλης μας είναι κινήσεις που εξελίσσονται πάνω σε επίπεδο και αναλύονται σε δύο μόνο άξονες **x** και **y**. Δηλαδή στον τρίτο άξονα z θα είναι πάντα $\Sigma F_z = 0$.)

Έτσι, αν:

<table>
<tr><th>$\Sigma F_y = 0$
Ευθύγραμμη κίνηση στον (x) άξονα</th><th colspan="2">$\Sigma F_y \neq 0$
Καμπυλόγραμμη κίνηση στο (x,y) επίπεδο</th></tr>
<tr><td>$\Sigma F_x = 0$ → ευθ. ομαλή κίνηση (ή ακινησία)</td><td colspan="2">$\Sigma F_x = 0$ → σταθερό μέτρο ταχύτητας, (υ = σταθ.)</td></tr>
<tr><td>ΣF_x = σταθ. → ευθ. ομαλή μεταβαλλόμενη κίνηση</td><td rowspan="3">$\Sigma F_x = 0$
και
ΣF_y = σταθ.</td><td rowspan="3">→ Ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r
($\alpha_\kappa = \upsilon^2/r$ = σταθ.)</td></tr>
<tr><td>$\Sigma F_x = -D\cdot x$ → Γ.Α.Τ</td></tr>
<tr><td>$\Sigma F_x \neq$ σταθ. → ευθ. μεταβαλλόμενη κίνηση</td></tr>
</table>

Ορμή σώματος – Γενικευμένη μορφή του θεμελιώδους νόμου

<table>
<tr><th colspan="2">Ορμή υλικού σημείου</th></tr>
<tr><td>$\boxed{\vec{p} = m\cdot\vec{\upsilon}}$</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Ορμή σώματος που κάνει μεταφορική κίνηση</th></tr>
<tr><td>$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... \rightarrow$
$\rightarrow \vec{p} = \Delta m_1\cdot\vec{\upsilon} + \Delta m_2\cdot\vec{\upsilon} + ... \rightarrow$
$\rightarrow \vec{p} = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + ...)\cdot\vec{\upsilon} \rightarrow$
$\boxed{\vec{p} = m\cdot\vec{\upsilon}}$</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Ορμή συστήματος υλικών σημείων</th></tr>
<tr><td>$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... \rightarrow$
$p_x = \Sigma p_{i\,x}$ και $p_y = \Sigma p_{i\,y}$
οπότε: $\boxed{p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}$ και $\boxed{\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{p_y}{p_x}}$
Σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας K του συστήματος</td><td></td></tr>
</table>

Γενίκευση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha} \;\rightarrow\; \Sigma\vec{F} = m\cdot\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \;\rightarrow\; \boxed{\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\vec{F}_{ολ} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}} \qquad (I)$$

«Η **συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ των δυνάμεων** που ασκούνται σε ένα σώμα είναι ανάλογη με τον **ρυθμό μεταβολής της ορμής** του. Η μεταβολή της ορμής γίνεται προς την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.»

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(1) Αν κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος $\Delta t = t_2 - t_1$ η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα παραμένει σταθερή ($\vec{F}_{ολ} = σταθ.$), τότε ο ρυθμός $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ έχει σταθερή τιμή και μπορούμε πρακτικά να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ***(I)***, ανάλογα με το ζητούμενο, σε οποιαδήποτε μορφή:

$$\boxed{\vec{F}_{ολ} = \frac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{\Delta t} = σταθ.} \quad (II) \qquad \text{ή αλλιώς} \qquad \boxed{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} = \vec{F}_{ολ}\cdot\Delta t} \quad (III)$$

(2) Στη γενική περίπτωση, που η συνισταμένη δύναμη δεν παραμένει σταθερή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ***(I)*** με δύο τρόπους:

(α) Σε χρόνο **Δt** (δηλ. από t_1 έως t_2), αν θέλουμε να βρούμε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής και την μέση τιμή της δύναμης στο χρόνο **Δt** (αφού διαιρούμε με το χρόνο αυτό):

$$\boxed{\vec{F}_{ΜΕΣΗ} = \frac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{\Delta t}}$$

(β) Οποιαδήποτε χρονική στιγμή, αν το ζητούμενο είναι να βρούμε τον (στιγμιαίο) ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος τη στιγμή αυτή και γνωρίζουμε ήδη τη δύναμη, τότε:

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \vec{F}}$$

****(3)*** Το γινόμενο **δύναμης – χρόνου** στην ***(III)*** ονομάζεται **ώθηση** της δύναμης: $\vec{\Omega} = \vec{F}\cdot\Delta t$ και επομένως αυτή μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} = \vec{\Omega}_{ολ}}$$

Η τελευταία αυτή σχέση αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του Θεωρήματος Ώθησης – Ορμής:

*«Η μεταβολή $\Delta\vec{p}$ στην ορμή ενός σώματος κατά τη διάρκεια χρόνου **Δt** είναι ίση με τη συνολική ώθηση $\vec{\Omega}_{ολ}$ που δέχεται το σώμα από τις δυνάμεις στον ίδιο χρόνο».*

*Αν μια δύναμη έχει σταθερή διεύθυνση, αλλά το μέτρο της μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε υπολογίζουμε το μέτρο **Ω** της ώθησης της δύναμης από το εμβαδό του διαγράμματος δύναμης – χρόνου:* $\Omega = \Sigma(F_i\cdot dt_i) = (Εμβ.)$ *της συνάρτησης **F(t)** από **t_1** έως **t_2**. Αν η διεύθυνση της δύναμης μεταβάλλεται, τότε αναλύουμε σε άξονες.*

Σύστημα σωμάτων – Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις – Μονωμένο σύστημα

Σύστημα σωμάτων ονομάζεται ένα οποιοδήποτε σύνολο από υλικά σημεία ή σώματα (της επιλογής μας). Ότι δεν ανήκει στο σύστημα ονομάζεται **περιβάλλον** του συστήματος.

Αν το σύστημα περιλαμβάνει περισσότερα από ένα σώματα, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτά διακρίνονται σε:

- **Εσωτερικές**: Δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος. Προφανώς, οι αντιδράσεις τους περιλαμβάνονται κι αυτές στο σύστημα. Εμφανίζονται δηλαδή σε ζευγάρια **δράσης – αντίδρασης** και ισχύει πάντα: $\boxed{\Sigma\vec{F}_{\text{ΕΣΩΤ}} = 0}$
- **Εξωτερικές**: Δυνάμεις που ασκούνται από το περιβάλλον στα σώματα του συστήματος. Οι αντιδράσεις τους ασκούνται στο περιβάλλον και δεν περιλαμβάνονται στο σύστημα.

Οι εξωτερικές δυνάμεις είναι αυτές που τελικά υπεισέρχονται στον γενικευμένο 2^{o} νόμο του Newton. Πράγματι, η ***(I)*** για ένα σύστημα σωμάτων γίνεται:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}_{\text{ΣΥΣΤ.}}}{\Delta t} \quad \longrightarrow \quad \Sigma\vec{F}_{\text{ΕΣΩΤ}} + \Sigma\vec{F}_{\text{ΕΞ}} = \frac{\Delta\vec{p}_{\text{ΣΥΣΤ.}}}{\Delta t} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Sigma\vec{F}_{\text{ΕΞ}} = \frac{\Delta\vec{p}_{\text{ΣΥΣΤ.}}}{\Delta t}} \qquad \textit{(IV)}$$

Ένα σύστημα ονομάζεται **μονωμένο** αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι κι αυτή μηδέν:

$$\boxed{\Sigma\vec{F}_{\text{ΕΞ}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{μονωμένο σύστημα}}$$

Αρχή διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ)

«Η συνολική ορμή σε ένα μονωμένο σύστημα σωμάτων διατηρείται σταθερή».

Πράγματι: $\Sigma\vec{F}_{\text{ΕΞ}} = \dfrac{\Delta\vec{p}_{\text{ΣΥΣΤ.}}}{\Delta t} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Delta\vec{p}_{\text{ΣΥΣΤ.}} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{p}_{\text{ΣΥΣΤ.}} = \text{σταθ.}$

Δηλαδή ακόμη και συμβεί κάποιο φαινόμενο όπου τα σώματα ενός μονωμένου συστήματος αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, οι εσωτερικές δυνάμεις δεν μπορούν να μεταβάλουν συνολικά την ορμή. Μπορούν μόνο να μεταφέρουν ορμή από το ένα σώμα στο άλλο, έτσι ώστε η συνολική ορμή να παραμένει αμετάβλητη:

$$\boxed{\vec{p}_{1,\pi\rho\iota\nu} + \vec{p}_{2,\pi\rho\iota\nu} + \ldots = \vec{p}_{1,\mu\varepsilon\tau\alpha} + \vec{p}_{2,\mu\varepsilon\tau\alpha} + \ldots}$$

Μερικά τέτοια παραδείγματα είναι:

- Η σύγκρουση δύο σωμάτων (κρούση).
- Η ανάκρουση του όπλου καθώς το βλήμα τινάζεται από την κάνη.
- Η έκρηξη και διάσπαση σε κομμάτια ενός βλήματος, πυροτεχνήματος ή φωτοβολίδας.
- Η λειτουργία της τουρμπίνας ενός πυραύλου.
- Δύο παγοδρόμοι που έσπρωξαν ο ένας τον άλλο στην παγωμένη πίστα.
- Ένας άνθρωπος που έτρεχε και πήδησε πάνω σε ένα έλκηθρο.
- Ένας άνθρωπος που άρχισε να βηματίζει μέσα στη (λυτή) βάρκα του.

- Το σύμπαν ολόκληρο, που θεωρείται ότι είναι ένα μονωμένο σύστημα.
- κλπ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Το έργο μιας δύναμης είναι μονόμετρο μέγεθος και το πρόσημό του σχετίζεται με το αν η δύναμη βοηθάει στην κίνηση του σώματος ή αντιστέκεται σ' αυτήν.

  Δεν είναι απαραίτητο δηλαδή να προσανατολίσουμε τον άξονα της κίνησης και να ορίσουμε θετική και αρνητική φορά κίνησης.

  Αρκεί μόνο να γνωρίζουμε αν η δύναμη έχει την ίδια ή την αντίθετη φορά από τη φορά της κίνησης (θετικό ή αρνητικό έργο).

- Στα προβλήματα όμως που σχετίζονται με την ορμή και γενικότερα με διανυσματικά μεγέθη και τους σχετικούς νόμους, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε προσανατολισμένο άξονα.

  Αναλύουμε δυνάμεις ορμές, ταχύτητες, κλπ. σε έναν (x) ή δύο (x, y) άξονες και εργαζόμαστε *αλγεβρικά* στον κάθε άξονα.

  Η θετική / αρνητική φορά σχετίζεται με το *πρόσημο* της αλγεβρικής τιμής του μεγέθους.

  Αν κάποιο μέγεθος είναι άγνωστο και δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνσή του (π.χ. η ταχύτητα ενός σώματος μετά από μία κρούση) τότε το σχεδιάζουμε με αυθαίρετη φορά. Αν μας προκύψει αρνητική λύση τότε η σωστή φορά είναι η αντίθετη από αυτή που αυθαίρετα σχεδιάσαμε.

- Ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα στη μορφή $\Sigma\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ είναι γενικότερος από τον $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$ διότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις σωμάτων ή συστημάτων όπου η μάζα μεταβάλλεται:

  $\Sigma\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Sigma\vec{F} = m \cdot \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} + \dfrac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \vec{\upsilon}$ ή αλλιώς:

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \vec{\upsilon}}$$

ΔΙΕΘΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΑΔΩΝ (S. I.)

Μέγεθος	Σύμβολο	Μονάδα	Εξίσωση ορισμού	Διαστάσεις (L,M,T,I)
Θεμελιώδη:				
μήκος (L)	l, d, s, x	m		1,0,0,0
μάζα (M)	m	kg, (kgr)		0,1,0,0
χρόνος (T)	t	s, (sec)		0,0,1,0
ένταση ρεύμ.(I)	i	A, (Amp)	$i = dq/dt$	0,0,0,1
θερμοκρασία	T	K		
χημ. ποσότητα	n	mol		
φωτεινή ένταση	I_v	cd		
Παράγωγα:				
εμβαδό επιφάν.	S, A	m^2		2,0,0,0
όγκος	V	m^3		3,0,0,0
ταχύτητα	$\boldsymbol{\upsilon}$, $\mathbf{v}$	m/s	$\boldsymbol{\upsilon} = d\mathbf{x}/dt$	1,0,-1,0
επιτάχυνση	$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$	m/s^2	$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\upsilon}/dt$	1,0,-2,0
δύναμη	$\mathbf{F}$	N, (Newton)	$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$	1,1,-2,0
ενέργεια	E, U, K	J, (Joule)		2,1,-2,0
έργο	W	J	$\delta W = (\mathbf{F} * d\mathbf{x})$ $W = \Sigma\,(\mathbf{F} * d\mathbf{x})$	2,1,-2,0
ισχύς	P	W, (Watt)	$P = \delta W/dt$	2,1,-3,0
ορμή	$\mathbf{p}$	kg·m/sec	$\mathbf{p} = m \cdot \boldsymbol{\upsilon}$	1,1,-1,0
ώθηση	$\boldsymbol{\Omega}$	N·s	$\delta\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{F} \cdot dt$ $\boldsymbol{\Omega} = \Sigma\,(\mathbf{F} \cdot dt)$	1,1,-1,0
ροπή	$\boldsymbol{\tau}$	N·m	$\boldsymbol{\tau} = [\,\mathbf{F} \times \mathbf{d}\,]$	2,1,-2,0
γωνία	φ, θ	r, (rad)	$\theta = s / r$	0,0,0,0
γωνιακή ταχύτητα	$\boldsymbol{\omega}$	r/s, (s^{-1})	$\omega = d\theta/dt$ $\mathbf{v} = [\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\,]$	0,0,-1,0
γωνιακή επιτάχυνση	$\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\alpha}$	r/s^2, (s^{-2})	$\boldsymbol{\omega}' = d\boldsymbol{\omega}/dt$ $\boldsymbol{\gamma} = [\,\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}\,]$	0,0,-2,0

περίοδος	T	sec	$T = t/N$	0,0,1,0
συχνότητα	f, ν	Hz, s^{-1}, c/s	$f = N/t$	0,0,-1,0
ροπή αδράνειας	I	$kg \cdot m^2$	$I = \Sigma (m \cdot r^2)$	2,1,0,0
στροφορμή	**L**	$kg \cdot m^2/s$	$\mathbf{L} = [\mathbf{p} \times \mathbf{r}]$	2,1,-1,0
ένταση βαρυτ.	**g**	N/kg	$\mathbf{g} = \mathbf{F} / m$	1,0,-2,0
πίεση	P	N/m^2	$P = F/S$	-1,1,-2,0
πυκνότητα	ρ, d	kg/m^3	$\rho = m/V$	-3,1,0,0
ειδικό βάρος	ε	N/m^3	$\varepsilon = B/V$	-2,1,-2,0
ηλεκτρ. φορτίο	q	C, Cb	$dq = i \cdot dt$ $q = \Sigma (i \cdot dt)$	0,0,1,1
ένταση ηλ. πεδίου	**E**	N/C, V/m	$\mathbf{E} = \mathbf{F} / {+q}$	1,1,-3,-1
δυναμικό ηλ. πεδ.	V	V, (Volt)	$V = W / {+q}$	2,1,-3,-1
χωρητικότητα	C	F, (Farad)	$C = q / V$	-2,-1,-2,0
αντίσταση	R	Ω, (Ohm)	$R = V / i$	2,1,-3,-2
ΗΕΔ	E	V, (Volt)	$E = W/q$ $E = P/i$	2,1,-3,-1
μαγν. επαγωγή	**B**	T, (Tesla)	$\mathbf{F} = i \cdot [\mathbf{l} \times \mathbf{B}]$	0,1,-2,-1
μαγνητική ροή	Φ	Wb, (Weber)	$\Phi = \Sigma (\mathbf{B} * d\mathbf{S})$	2,1,-2,-1
συντελ. αυτεπαγ.	L	H, (Henry)	$E_{αυτ} = L \cdot di/dt$	2,1,-2,-2