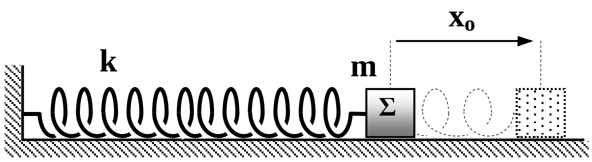
Σώμα δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο, δάπεδο με τριβή



Το ελατήριο του σχήματος έχει σταθερά **k=2000N/m** και το σώμα **Σ** που είναι δεμένο στο άκρο του έχει μάζα **m=2kg**. Επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά $\mathbf{x_0}$**=4cm** και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Το σώμα **Σ** αρχίζει να κινείται και τελικά ηρεμεί αφού διανύσει συνολικό διάστημα **S=20cm**. Να βρεθούν: ο συντελεστής τριβής **μ** σώματος – δαπέδου, το πλήθος **ν** των περασμάτων από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, και η θέση όπου τελικά θα σταματήσει το σώμα. Να θεωρήσετε ότι οι συντελεστές τριβής ολίσθησης και οριακής στατικής τριβής είναι ίσοι, δηλαδή $\mu_{ολ}=\mu_{ορ}=\mu$. Δίνεται: $g=10m/s^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(Τα σύμβολα αντιστοιχούν σε μέτρα μεγεθών).

Το σώμα **Σ** θα σταματήσει για πρώτη φορά μετά την εκκίνηση όταν το ελατήριο θα έχει **συμπιεστεί** κατά x_1, για δεύτερη φορά σε **επιμήκυνση** x_2, για τρίτη σε **συμπίεση** x_3, και ούτω καθεξής. Μετά από κάθε σταμάτημα θα ξεκινάει πάλι μόνο αν $F_{ελ}>T_{στ}$. Όταν σε κάποια από τις θέσεις μηδενισμού της ταχύτητας γίνει για πρώτη φορά $F_{ελ}\leq T_{στ}$, τότε το σώμα θα παραμείνει ακίνητο στη θέση αυτή. Αναλυτικά:

- Από επιμήκυνση x_0 σε συσπείρωση x_1 → διάστημα $x_0 + x_1$
- Από συσπείρωση x_1 σε επιμήκυνση x_2 → διάστημα $x_1 + x_2$
- Από επιμήκυνση x_2 σε συσπείρωση x_3 → διάστημα $x_2 + x_3$

…………..

α) Αν τελικά σταματήσει ενώ κατευθύνεται προς ακραία θέση θα έχει περάσει **ν φορές** από τη θέση του ΦΜ και:

- Από παραμόρφωση $x_{ν-1}$ σε παραμόρφωση $x_ν$ → διάστημα $x_{ν-1} + x_ν$

β) Αν όμως σταματήσει ενώ κατευθύνεται προς τη θέση του ΦΜ τότε θα έχει περάσει από εκεί **ν–1 φορές** και:

- Από παραμόρφωση $x_{ν-1}$ σε παραμόρφωση $x_ν$ → διάστημα $x_{ν-1} - x_ν$

*Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μόνο την περίπτωση **(α)** και ανάλογα μπορεί να μελετηθεί και η **(β)**.*

Η τελική παραμόρφωση $x_ν$ όπου σταματάει οριστικά, είναι αυτή για την οποία ***θα ισχύει για πρώτη φορά***: $\boxed{k\cdot x_ν \leq \mu\cdot m\cdot g}$ (*συνθήκη τερματισμού*)

Εφαρμόζοντας τώρα το ΘΜΚΕ ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της ταχύτητας, έχουμε:

$$\Sigma W = \Delta K \;\rightarrow\; \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot x_0^2 - \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot x_1^2 - \mu\cdot m\cdot g\cdot(x_0 + x_1) = 0 \;\rightarrow$$

$$(x_0 - x_1)\cdot(x_0 + x_1) = 2\cdot\mu\cdot m\cdot g\cdot(x_0 + x_1)/k \;\rightarrow\; x_1 = x_0 - 2\mu mg/k$$

Αν θέσουμε $\boxed{\omega = -2\mu mg/k}$ τότε έχουμε: $\boxed{x_1 = x_0 + \omega}$.

Όμοια και για τις επόμενες παραμορφώσεις:

$$x_2 = x_1 + \omega = x_0 + 2\omega$$

$$x_3 = x_2 + \omega = x_0 + 3\omega$$

……

και γενικά:

$$\boxed{x_\nu = x_0 + \nu\omega}$$

$$x_{\nu-1} = x_0 + (\nu-1)\omega \quad \text{ή} \quad \boxed{x_{\nu-1} = x_\nu - \omega}$$

Βλέπουμε ότι οι διαδοχικές παραμορφώσεις αποτελούν αριθμητική πρόοδο με λόγο ***ω****.*

Από τη συνθήκη τερματισμού που γράψαμε πιο πάνω, έχουμε:

$$k\cdot x_\nu \le \mu\cdot m\cdot g \;\rightarrow\; x_0 - \nu 2\mu mg/k \le \mu mg/k \;\rightarrow\; x_0 \le \mu mg(2\nu+1)/k$$

και με αντικατάσταση: $\boxed{\mu \ge \dfrac{4}{2\nu+1}}$ ***(I)***

Το συνολικό διάστημα τώρα που έχει διανύσει το σώμα είναι:

$$S = x_0 + 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_{\nu-1} + x_\nu = x_0 + x_\nu + 2\Sigma_{\nu-1}$$

όπου $\Sigma_{\nu-1}$ το άθροισμα των όρων $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ της αριθμητικής προόδου. Έτσι:

$$S = x_0 + x_\nu + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(x_1 + x_{\nu-1})\cdot(\nu-1) = x_0 + x_\nu + (x_0 + x_\nu)\cdot(\nu-1) \;\rightarrow$$

$$S = (x_0 + x_\nu)\cdot\nu \;\rightarrow\; \boxed{S = \nu\cdot(2x_0 - 2\nu\cdot\mu mg/k)}$$

και με αντικατάσταση και επίλυση ως προς **μ** παίρνουμε:

$$\boxed{\mu = \frac{4\nu - 10}{\nu^2}} \quad \textit{(II)}$$

Η ***(I)*** με τη βοήθεια της ***(II)*** γίνεται:

$$\frac{4\nu - 10}{\nu^2} \ge \frac{4}{2\nu+1} \;\rightarrow\; \ldots. \;\rightarrow\; \boxed{\nu \ge 4{,}55}$$

Επειδή ζητάμε την ***πρώτη φορά*** (βλέπε πιο πάνω) άρα τελικά: $\boxed{\nu = 5}$

και από τη ***(ΙΙ)***: $\boxed{\mu = 0{,}4}$

Επαλήθευση – εύρεση της θέσης που σταματάει τελικά το σώμα:

Όπως είδαμε από τη σχέση $\mathbf{x_\nu = x_0 + \nu\omega}$ ή αλλιώς: $\mathbf{x_\nu = x_0 - \nu \cdot 2\mu m g/k}$ κάθε επόμενη παραμόρφωση του ελατηρίου μειώνεται κατά $\mathbf{2\mu m g/k = 0{,}8cm}$.

Έτσι, οι διαδοχικές παραμορφώσεις του ελατηρίου είναι:

$\mathbf{x_0 = 4\ cm}$

$\mathbf{x_1 = 3{,}2\ cm}$

$\mathbf{x_2 = 2{,}4\ cm}$

$\mathbf{x_3 = 1{,}6\ cm}$

$\mathbf{x_4 = 0{,}8\ cm}$

$\mathbf{x_5 = 0\ cm}$

Το σώμα ***σταματάει δηλαδή ακριβώς στη θέση του ΦΜ*** τη στιγμή που φτάνει εκεί για ***5^η φορά***.

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε είναι:

$$\mathbf{S = (4 + 2 \cdot 3{,}2 + 2 \cdot 2{,}4 + 2 \cdot 1{,}6 + 2 \cdot 0{,}8 + 0)\ cm = 20\ cm}$$