3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Αντικείμενο εξέτασης: Όλη η διδακτέα ύλη
Χρόνος εξέτασης: Απεριόριστος λόγω αυξημένου βαθμού δυσκολίας

ΘΕΜΑ 1ο

Στις ερωτήσεις 1-4 να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Στους τύπους που περιγράφουν το φαινόμενο Doppler για τον ήχο οι εμφανιζόμενες ταχύτητες μετρούνται ως προς ποιο από τα παρακάτω σύστηματα αναφοράς;

α. Το σύστημα αναφοράς της ακίνητης γης.

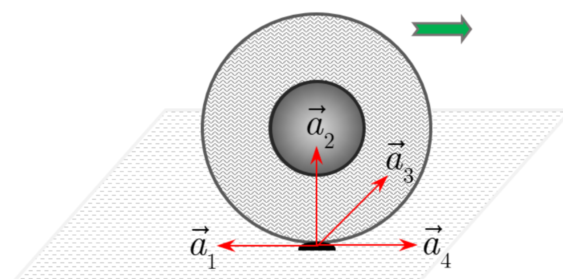
β. Το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας της πηγής και του παρατηρητή.

γ. Το σύστημα αναφοράς στο οποίο η πηγή είναι ακίνητη.

δ. Το σύστημα αναφοράς του μέσου διάδοσης του ήχου.

Μονάδες 5

2. Ένα αμάξι κινείται με σταθερή ταχύτητα στην κατεύθυνση που δείχνει το πράσινο βέλος της εικόνας και κάποια στιγμή διέρχεται από λασπωμένο δρόμο, με αποτέλεσμα ένα κομμάτι λάσπης να κολλήσει σε κάποιο από τα λάστιχά του. Ποιο από τα διανύσματα της εικόνας αντιστοιχεί στην μεταφορική επιτάχυνση του κομματιού λάσπης καθώς αυτό αποχωρίζεται τον δρόμο;



α. Το διάνυσμα $\vec{a}_1$.

β. Το διάνυσμα $\vec{a}_2$.

γ. Το διάνυσμα $\vec{a}_3$.

δ. Το διάνυσμα $\vec{a}_4$.

Μονάδες 5

3. Μία βρύση έχει αφεθεί ανοιχτή για αρκετή ώρα έτσι ώστε να εμφανίζεται ομαλή ροή του νερού κατακόρυφα προς τα κάτω. Το (κυκλικό) στόμιο της βρύσης έχει επιφάνεια ίση προς S, και το νερό εγκαταλείπει τη βρύση με ταχύτητα μέτρου V. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν στη σχηματιζόμενη κατακόρυφη στήλη νερού είναι λανθασμένη;

α. Η διατομή της κατακόρυφης στήλης νερού μικραίνει καθώς αυξάνεται η κατακόρυφη απόσταση (προς τα κάτω) από το στόμιο της βρύσης.

β. Η πίεση σε οποιαδήποτε κατακόρυφη απόσταση κάτω από το στόμιο της βρύσης είναι όση και η πίεση στο στόμιο της βρύσης.

γ. Η διατομή της κατακόρυφης στήλης νερού πάρα πολύ κοντά στο στόμιο της βρύσης μειώνεται κατά μία ποσότητα που εξαρτάται από το αντίστροφο τετράγωνο της ταχύτητας V.

δ. Η διατομή της κατακόρυφης στήλης νερού είναι αντιστρόφως ανάλογη της κατακόρυφης απόστασης (προς τα κάτω) από το στόμιο της βρύσης.

Μονάδες 5

4. Δύο σημειακές πηγές $Σ_1$ και $Σ_2$, που κείνται κατά μήκος του άξονα x΄Ox και είναι συμμετρικά τοποθετημένες ως προς την αρχή των αξόνων O, εκπέμπουν κύματα με μήκος κύματος λ = 1 cm. Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο πηγών είναι π rad. Αν είναι γνωστό ότι όλα τα σημεία της ισοσκελούς υπερβολής με εξίσωση $x^2 - y^2 = 8$ (σε cm) είναι σημεία αναιρετικής συμβολής, πόσα σημεία αναιρετικής συμβολής παρεμβάλλονται *μεταξύ* των δύο πηγών επί του άξονα x΄Ox;

α. 7 σημεία αναιρετικής συμβολής

β. 8 σημεία αναιρετικής συμβολής

γ. 9 σημεία αναιρετικής συμβολής

δ. 10 σημεία αναιρετικής συμβολής

Μονάδες 5

5. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα καθεμιάς από τις προτάσεις που ακολουθούν και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ** αν η πρόταση που παρατίθεται είναι σωστή ή **Λ** αν είναι λανθασμένη.*

Α. Δυνάμεις αντίστασης της μορφής $F_D = -bv$ (όπου b είναι η σταθερή απόσβεσης και v η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος που δέχεται τη δύναμη αντίστασης) αντίκεινται στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα που συνδέει την συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα με την επιτάχυνση του σώματος.

Β. Η ατμόσφαιρα της Γης μπορεί σε πολύ καλή προσέγγιση να θεωρηθεί ως ασυμπίεστο ρευστό.

Γ. Ένα ποτήρι νερού είναι πλήρως γεμάτο (δηλ. γεμάτο μέχρι το χείλος του) και εμπεριέχει εκτός από νερό κι ένα παγάκι που επιπλέει στο νερό. Καθώς λιώνει το παγάκι το νερό αρχίζει να ξεχειλίζει από το ποτήρι.

Δ. Υποθέστε τώρα ότι το ποτήρι του προηγούμενου υποερωτήματος είναι μη πλήρως γεμάτο. Αν συμπιέσουμε κατακόρυφα προς τα κάτω το παγάκι που επιπλέει, τότε αυτό θα ξεκινήσει να εκτελεί κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση.

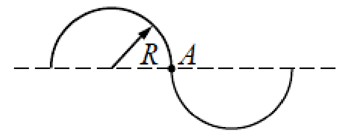
Ε. Η στροφορμή, ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει ένα φορτισμένο σωματίδιο που κινείται κάθετα στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

1. *Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Το σύρμα σχήματος S που δείχνεται στη διπλανή εικόνα έχει μάζα M, και η ακτίνα καμπυλότητας κάθε ημικυκλίου είναι ίση προς R. Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος είναι ίση προς:



α. $MR^2/2$

β. MR^2

γ. $2MR^2$

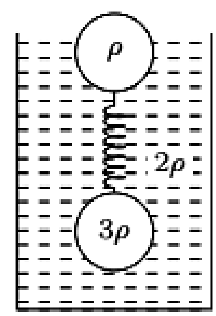
Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 4

2. *Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Μία ομογενής σφαίρα ακτίνας R και πυκνότητας ρ είναι δεμένη στο άκρο αβαρούς ιδανικού ελατηρίου σταθερής επαναφοράς k. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σε δεύτερη ομογενή σφαίρα ακτίνας R και πυκνότητας 3ρ. Η ανωτέρω διάταξη (δύο σφαιρών-ελατηρίου) τοποθετείται μέσα σε υγρό πυκνότητας 2ρ και αφήνεται να ισορροπήσει. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι <u>σωστή</u>;



α. Η επιμήκυνση του ελατηρίου στην ανωτέρω περίπτωση είναι ίση προς $\dfrac{8\pi R^3 \rho g}{3k}$.

β. Αν η ανωτέρω διάταξη σφαιρών-ελατηρίου βυθιστεί σε υγρό πυκνότητας 3ρ και αφεθεί να ισορροπήσει τότε η ελαφρύτερη σφαίρα είναι βυθισμένη μόνο κατά τα 2/3 του όγκου της.

γ. Αν η ανωτέρω διάταξη σφαιρών-ελατηρίου βυθιστεί σε υγρό πυκνότητας μεγαλύτερης από την πυκνότητα της βαρύτερης σφαίρας και αφεθεί να ισορροπήσει, τότε κατά την ισορροπία το ελατήριο είναι συμπιεσμένο.

δ. Η ελαφρύτερη σφαίρα είναι μερικώς βυθισμένη μέσα στο υγρό πυκνότητας 2ρ.

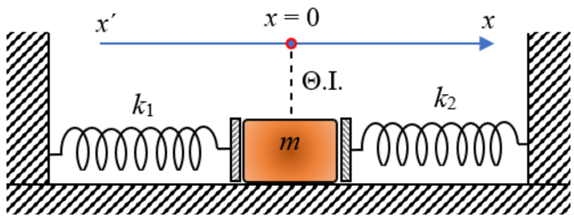
Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 5

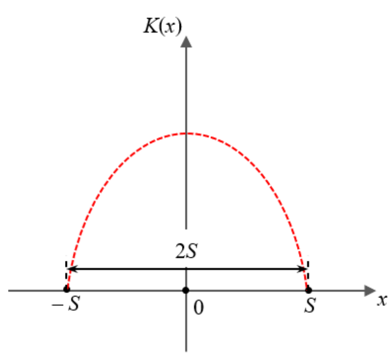
3. *Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στη διάταξη του παρακάτω σχήματος το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο και τα ελατήρια είναι ιδανικά. Αρχικώς, το σώμα μάζας m ισορροπεί στη θέση $x = 0$ του οριζόντιου άξονα $x'x$, το κάθε ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, και το σώμα m μόλις που εφάπτεται στο κάθε ελατήριο. Οι σταθερές επαναφοράς των ελατηρίων k_1 και k_2 είναι διαφορετικές μεταξύ τους και ισχύει ότι $k_1 > k_2$.

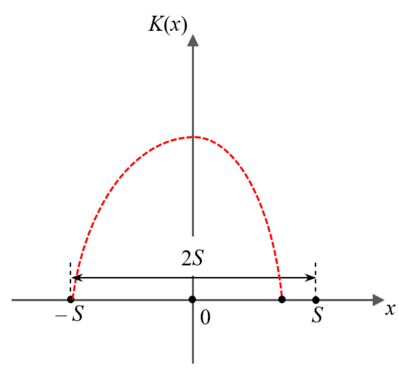


Αν εκτρέψουμε το σώμα μάζας m προς τα δεξιά κατά μία απόσταση ίση προς S, ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζει σωστά την κινητική ενέργεια K του σώματος m σαν συνάρτηση της απόστασης x από τη θέση ισορροπίας του ($x = 0$);

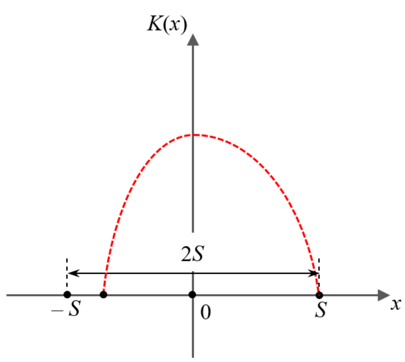
α.



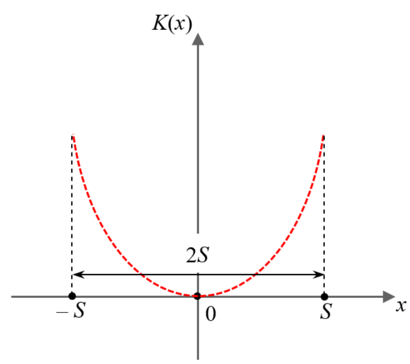
β.



γ.



δ.



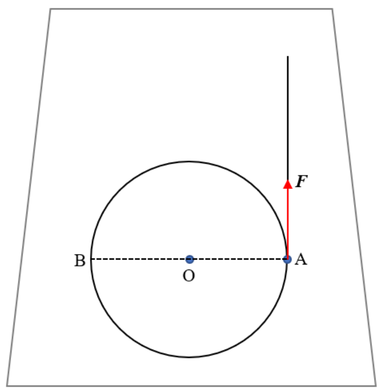
Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 4

4. *Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Ένας ομογενής δίσκος μάζας m και ακτίνας r ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Στην περιφέρεια του δίσκου είναι τυλιγμένο πολλές φορές αβαρές και μη εκτατό νήμα. Κάποια στιγμή ασκείται στο νήμα σταθερή δύναμη μέτρου F, με αποτέλεσμα αυτό με τη σειρά του να ασκεί αντίστοιχη δύναμη στο σημείο A της περιφέρειας του δίσκου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του δίσκου και διερχόμενο από το κέντρο μάζας του είναι $I_{CM} = ½ mr^2$. Σχετική ολίσθηση μεταξύ δίσκου και νήματος δεν υπάρχει.



Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστή;

α. Για να μετακινηθεί το κέντρο μάζας του δίσκου κατά μία απόσταση s δαπανήθηκε έργο ίσο προς Fs.

β. Για να μετακινηθεί το κέντρο μάζας του δίσκου κατά μία απόσταση s δαπανήθηκε έργο ίσο προς 2Fs.

γ. Για να μετακινηθεί το κέντρο μάζας του δίσκου κατά μία απόσταση s δαπανήθηκε έργο ίσο προς 3Fs.

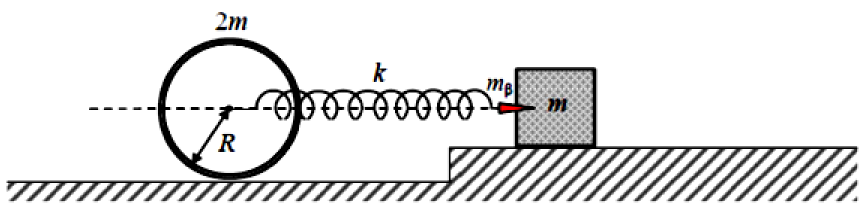
Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα το αριστερό άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθερής επαναφοράς k είναι προσδεμένο στο κέντρο μάζας ομογενούς κυλίνδρου μάζας $2m$, ενώ το δεξί άκρο του είναι στερεωμένο ακλόνητα σε σώμα μάζας m. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος. Την χρονική στιγμή $t = 0$, σημειακό βλήμα μάζας $m_\beta << m$ κινούμενο με ταχύτητα μέτρου υ_0 επί οριζόντιας ευθείας που διέρχεται από τα κέντρα μάζας των δύο προαναφερθέντων σωμάτων, σφηνώνεται ακαριαία στο κέντρο μάζας του σώματος μάζας m, οπότε το σύτημα τίθεται σε κίνηση προς τα δεξιά. Τριβές μεταξύ του υπερυψωμένου οριζοντίου δαπέδου και του σώματος μάζας m δεν υπάρχουν, ενώ ο συντελεστής τριβής (στατικής ή ολίσθησης) μεταξύ του κυλίνδρου και του χαμηλότερου οριζοντίου δαπέδου επί του οποίου κινείται ο κύλινδρος είναι μ. Δίνονται: Η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R ως προς άξονα περιστροφής που συμπίπτει με τον κύριο άξονα συμμετρίας του $I_{CM} = ½ MR^2$, και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον.

Α. Έστω ότι η ταχύτητα εκτόξευσης του σημειακού βλήματος είναι τέτοια ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται πάντοτε δίχως ολίσθηση.

Α.1 Να βρείτε τον λόγο του μέτρου της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου προς το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του σώματος μάζας m.

Μονάδες 3

Α.2 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και του σώματος μάζας m ακριβώς την στιγμή της μέγιστης δυνατής επιμήκυνσης του ελατηρίου.

Μονάδες 5

Α.3 Να υπολογίσετε την μέγιστη δυνατή επιμήκυνση του ελατηρίου.

Μονάδες 4

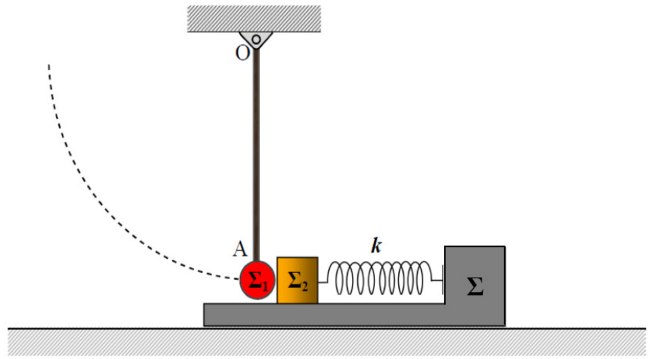
Α.4 Ποια είναι η μέγιστη δυνατή ταχύτητα εκτόξευσης του βλήματος για την οποίαν ο κύλινδρος μπορεί να κυλίεται πάντοτε χωρίς ολίσθηση;

Μονάδες 5

Β. Αν το βλήμα εκτοξευθεί με ταχύτητα διπλάσια από την μέγιστη δυνατή ταχύτητα εκτόξευσης για την οποίαν ο κύλινδρος κυλίεται πάντοτε χωρίς ολίσθηση (που υπολογίστηκε στο ερώτημα **Α.4**), να βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και του σώματος μάζας m ακριβώς μόλις πριν ξεκινήσει η ολίσθηση του κυλίνδρου.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο



Ομογενής και ισοπαχής δοκός ΟΑ μάζας $3m$ και μήκους l μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ακλόνητο άνω άκρο της Ο, όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα. Στο κάτω άκρο Α της δοκού είναι στερεωμένο (εκ του κέντρου μάζας του) μικρό σώμα Σ_1 μάζας m. Δεύτερο μικρό σώμα Σ_2 μάζας $2m$, ακλόνητα στερεωμένο στο αριστερό άκρο αβαρούς ιδανικού ελατηρίου σταθεράς επαναφοράς k, το δεξιό άκρο του οποίου είναι ελεύθερο, μπορεί να κινείται πάνω σε ξύλινη βάση Σ μάζας 3m. Τριβές μεταξύ του σώματος Σ_2 και της βάσης Σ δεν υπάρχουν, ενώ η βάση Σ βρίσκεται πάνω σε τραχύ δάπεδο, με τον συντελεστή τριβής (στατικής ή ολίσθησης) μεταξύ τους ίσο προς μ. Αρχικά η δοκός ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση, ενώ το κέντρο μάζας του σώματος Σ_1 είναι στο ίδιο ύψος από το οριζόντιο δάπεδο με το κέντρο μάζας του σώματος Σ_2 (το σώμα Σ_1 δεν ακουμπά ποτέ επί της ξύλινης βάσης). Περαιτέρω, το ιδανικό ελατήριο κρατείται αρχικώς συμπιεσμένο κατά μία απόσταση ίση προς $S = 10\mu mg/k$ (ως προς το φυσικό του μήκος) με τη βοήθεια νήματος δεμένου στο σώμα Σ_2 και με το δεξιό άκρο του πλήρως εφαπτόμενο στη βάση Σ (το ελατήριο μόνο ακουμπάει στη βάση Σ), ενώ, το συνολικό σύστημα σώματος Σ_2 – ελατηρίου – βάσης Σ την ίδια στιγμή ισορροπεί. Κάποια στιγμή κόβουμε το προαναφερθέν νήμα και αφήνουμε το ανωτέρω σύστημα ελεύθερο να κινηθεί. Διαπιστώνονται τα εξής:

(α) Ακριβώς αμέσως μόλις το ελατήριο ανακτήσει το φυσικό του μήκος, το σώμα Σ_2 συγκρούεται κεντρικά και πλήρως ανελαστικά με το σώμα Σ_1, το οποίο μετά την κρούση ανέρχεται κατά μία κατακόρυφη απόσταση ίση προς h, όπου $h < 5\mu S/4$ (υπενθυμίζεται ότι S είναι η αρχική συσπείρωση του ελατηρίου που δόθηκε πιο πάνω).

(β) Η ξύλινη βάση Σ εώς και την στιγμή της κρούσης έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά μία απόσταση ίση με το μισό της συνολικής απόστασης κατά την οποία εκτοπίζεται.

<u>Δίνονται</u>: Η ροπή αδράνειας ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου μάζας Μ και μήκους L ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, $I_{CM} = ML^2/12$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Εάν είναι γνωστό ότι δεν λαμβάνει χώρα καμία αναπήδηση, ότι η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα, και ότι το σώμα Σ_2 δεν αποχωρίζεται ποτέ τη βάση Σ, *να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον*.

Α. Να υπολογίσετε την συνολική απόσταση κατά την οποία εκτοπίστηκε η βάση Σ.

Μονάδες 8

Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ ακριβώς πριν την κρούση, ως προς το οριζόντιο δάπεδο.

Μονάδες 8

Γ. Αν ισχύουν τα παραπάνω δεδομένα, με εξαίρεση το δεδομένο περί της κατακόρυφης μετατόπισης της δοκού ΟΑ στη διαπίστωση (α) και ολόκληρη την διαπίστωση (β), με τη διαφορά ότι η βάση Σ βρίσκεται πάνω σε λείο δάπεδο (αντί για το τραχύ δάπεδο που είχαμε αρχικά), να υπολογίσετε τις κινητικές ενέργειες <u>όλων</u> των σωμάτων *αμέσως πριν* <u>*και*</u> *αμέσως μετά την ανελαστική κρούση*, σαν συνάρτηση της νέας κατακόρυφης μετατόπισης h' $(h' < 50\mu^2 mg \,/\, 4k)$ της δοκού ΟΑ.

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

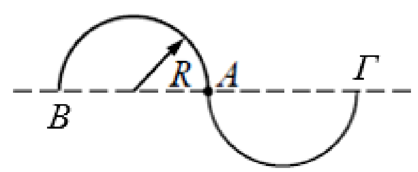
Απαντήσεις των ασκήσεων

ΘΕΜΑ 1ο

1. (δ), 2. (β), 3. (δ), 4. (α), 5.Α (Λ), 5.Β (Λ), 5.Γ (Λ), 5.Δ (Λ), 5.Ε (Σ)

Ως περαιτέρω εξάσκηση προσπαθείστε να εξηγήσετε αναλυτικά (εφόσον οι ερωτήσεις δεν σας φαίνονται τετριμμένες ... ελπίζω να μην σας φανούν ...) τα αποτελέσματα κάθε ερώτησης πολλαπλής επιλογής και Σωστού-Λάθους ... .

ΘΕΜΑ 2ο



1. Η ροπή αδράνειας του σύρματος σχήματος S δεν αλλάζει αν απλά στρίψουμε το σύρμα περί το σημείο Α έτσι ώστε τα άκρα Β και Γ να συμπέσουν το ένα με το άλλο. Το τελευταίο ισχύει λόγω της συμμετρίας αντιστροφής που έχει η διάταξη ως προς το σημείο Α (δηλ. το σημείο Α είναι inversion center). Για παράδειγμα, λόγω της προαναφερθείσας συμμετρίας, για κάθε σημείο του ημικυκλίου ΑΒ, υπάρχει σημείο του ημικυκλίου ΑΓ στην ίδια ακριβώς απόσταση από το σημείο Α, με τα διανύσματα θέσης των προαναφερθέντων σημείων ως προς το σημείο Α να είναι αντίθετα (αντίρροπα και ίσου μέτρου). Η ροπή αδράνειας όμως ενός στοιχειώδους τμήματος του σύρματος δεν εξαρτάται από το διάνυσμα θέσης του τμήματος ως προς τον άξονα περιστροφής (ο οποίος εν προκειμένω διέρχεται από το Α κάθετα στο επίπεδο του σχήματος), αλλά μόνο από την απόσταση του στοιχειώδους τμήματος, πράγμα που τελικώς επιτρέπει τη χρήση της συμμετρίας αντιστροφής ως ειπώθηκε παραπάνω. Όταν τα άκρα Β και Γ ταυτιστούν, το σύρμα παίρνει τη μορφή κυκλικής στεφάνης ακτίνας R. Η ροπή αδράνειας κυκλικής στεφάνης ακτίνας R ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο συμμετρίας της Ο είναι $I_O = MR^2$. Για να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς άξονα διερχόμενο από το σημείο Α εφαρμόζουμε το θεώρημα Steiner, το οποίο δίνει ότι $I_A = I_O + MR^2 = 2MR^2$. **Η σωστή απάντηση είναι η (γ).**

2. Θα εξετάσουμε ταυτόχρονα τις εξής δύο περιπτώσεις: (α) το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά την ισορροπία και (β) το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά την ισορροπία. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του υγρού είναι x, ώστε να μπορούμε να την αλλάζουμε ελέγχοντας μία προς μία τις δοθείσες προτάσεις. Λόγω της ισορροπίας ισχύουν οι κάτωθι εξισώσεις για κάθε σφαίρα: (χάρην συντομίας ονομάζουμε σφαίρα 1 την ελαφρύτερη σφαίρα και σφαίρα 2 την βαρύτερη)

$$\left.\begin{Bmatrix} xV_{\beta\upsilon\theta}g = ks + \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho g \\ \\ x\dfrac{4}{3}\pi R^3 g + ks = 4\pi R^3\rho g \end{Bmatrix}\right. - elongated\ spring$$

[1]

$$\left.\begin{Bmatrix} xV_{\beta\upsilon\theta}g + ks' = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho g \\ \\ x\dfrac{4}{3}\pi R^3 g = ks' + 4\pi R^3\rho g \end{Bmatrix}\right. - compressed\ spring$$

όπου s είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου και s' η συσπείρωση αυτού. Ελέγχουμε στη συνέχεια μία προς μία τις δοθείσες προτάσεις μέχρι να βρεθεί η σωστή!

Πρόταση α: Η επιμήκυνση του ελατηρίου βρίσκεται από το πάνω σύστημα εξισώσεων της εξ.[1]. Συγκεκριμένα από τη δεύτερη σχέση του πάνω συστήματος βρίσκουμε ότι

$$x\frac{4}{3}\pi R^3 g + ks = 4\pi R^3\rho g \Rightarrow 2\rho\frac{4}{3}\pi R^3 g + ks = 4\pi R^3\rho g \Rightarrow s = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3\rho g}{k} \qquad [2]$$

Επομένως η πρόταση α είναι λανθασμένη.

Πρόταση δ: Πάλι από το πάνω σύστημα εξισώσεων της εξ.[1], χρησιμοποιώντας και το αποτέλεσμα της εξ.[2] βρίσκουμε ότι

$$xV_{\beta\upsilon\theta}g = ks + \frac{4}{3}\pi R^3\rho g \Rightarrow 2\rho V_{\beta\upsilon\theta}g = ks + \frac{4}{3}\pi R^3\rho g \xrightarrow{[2]} 2\rho V_{\beta\upsilon\theta}g = k\frac{4}{3}\frac{\pi R^3\rho g}{k} + \frac{4}{3}\pi R^3\rho g \Rightarrow$$

$$2\rho V_{\beta\upsilon\theta}g = 2\frac{4}{3}\pi R^3\rho g \Rightarrow V_{\beta\upsilon\theta} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

[3]

Επομένως, η πρόταση δ είναι λανθασμένη αφού η σφαίρα 1 είναι πλήρως βυθισμένη στο υγρό πυκνότητας 2ρ.

Πρόταση γ: Για να ελέγξουμε την ορθότητα αυτής της πρότασης εστιάζουμε στο κάτω σύστημα εξισώσεων της εξ.[1], υποθέτοντας ότι x > 3ρ. Είναι λοιπόν:

$$x\frac{4}{3}\pi R^3 g = ks' + 4\pi R^3\rho g \xrightarrow{\text{for the spring to be compressed}} x\frac{4}{3}\pi R^3 g - 4\pi R^3\rho g = ks' > 0$$

$$\Rightarrow x\frac{4}{3}\pi R^3 g - 4\pi R^3\rho g > 0 \Rightarrow x\frac{1}{3} > \rho \Rightarrow x > 3\rho$$

[4]

Συνεπώς, **η πρόταση (γ) είναι σωστή**.

Κανονικά βρέθηκε η ζητούμενη απάντηση και θα μπορούσαμε να είχαμε σταματήσει εδώ. Θα ελέγξουμε όμως για λόγους πληρότητας και την πρόταση β που απέμεινε.

Πρόταση β: Εκ του κάτω συστήματος εξισώσεων της εξ.[1] (εναλλακτικά θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει το πάνω σύστημα εξισώσεων της εξ.[1] ... γιατί;) είναι:

$$\begin{Bmatrix} xV_{\beta\upsilon\theta}g + ks' = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g \\ \\ x\dfrac{4}{3}\pi R^3 g = ks' + 4\pi R^3 \rho g \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3\rho V_{\beta\upsilon\theta}g + ks' = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g \\ \\ 3\rho\dfrac{4}{3}\pi R^3 g = ks' + 4\pi R^3 \rho g \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3\rho V_{\beta\upsilon\theta}g + ks' = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g \\ \\ ks' = 4\rho\pi R^3 g - 4\pi R^3 \rho g = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$3\rho V_{\beta\upsilon\theta}g + 0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \Rightarrow V_{\beta\upsilon\theta} = \frac{4}{9}\pi R^3 = \frac{1}{3}\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{V_{sphere,1}}{3} \tag{5}$$

Συνεπώς, η πρόταση β είναι λανθασμένη αφού η σφαίρα 1 (η ελαφρύτερη) είναι βυθισμένη σε υγρό πυκνότητας 3ρ μόνο κατά το 1/3 του όγκου της.

3. Στην άσκηση αυτή το σώμα μάζας m δεν είναι δεμένο σε κανένα από τα δύο ελατήρια, και περαιτέρω, η δυναμική του ενέργεια δίνεται από την κάτωθι σχέση:

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}k_2 x^2, & if\ x \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}k_1 x^2, & if\ x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το σύστημα συντεταγμένων που δίνεται στο σχήμα. Εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας, η ολική ενέργεια του σώματος μάζας m διατηρείται και είναι ίση προς $\mathrm{E} = \frac{1}{2}k_2 S^2 = const.$. Όταν το προς τα δεξιά εκτρεπόμενο σώμα μάζας m αφεθεί ελεύθερο, θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση αλλά με διαφορετική περίοδο εκατέρωθεν της θέσης ισορροπίας (x = 0). Επιπλέον, κατά την κίνηση του σώματος μάζας m ισχύει ότι

$$K(x) + V(x) = \mathrm{E} \Rightarrow K(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}k_2 S^2 - \dfrac{1}{2}k_2 x^2, & if\ x \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}k_2 S^2 - \dfrac{1}{2}k_1 x^2, & if\ x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Η κινητική ενέργεια μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις, οι οποίες βρίσκονται εκ της εξ.[7]:

$$K(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}k_2S^2-\frac{1}{2}k_2x^2=0, \;\; if\; x\geq 0 \\ \\ \frac{1}{2}k_2S^2-\frac{1}{2}k_1x^2=0, \;\; if\; x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{01}=+S \\ x_{02}=-\frac{k_2}{k_1}S>-S, \;\; since\; k_1>k_2 \end{cases} \quad [8]$$

Με βάση τις ανωτέρω ακραίες θέσεις, το ζητούμενο διάγραμμα είναι **το διάγραμμα (γ)**.

4. Κατά την κίνηση του δίσκου πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} &translational\ motion: F=ma \\ &rotational\ motion: rF=I_{CM}\alpha=\frac{1}{2}mr^2\alpha \end{aligned} \quad [9]$$

Σε περίπτωση που το κέντρο μάζας του δίσκου μετακινηθεί κατά μία απόσταση s, το έργο της δύναμης του νήματος κατά τη μεταφορική κίνηση είναι

$$W_F=Fs \quad [10]$$

... παράγεται όμως έργο και για την περιστροφή του δίσκου περί (κατακόρυφο) άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το οποίο πρέπει να συνυπολογίσουμε! Πριν από αυτό όμως, πρέπει να βρούμε πόσο περιστράφηκε ο δίσκος κατά τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κατά απόσταση s. Εφοσόν στον δίσκο ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου F, αυτό σημαίνει ότι το κέντρο μάζας του εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση (χωρίς αρχική ταχύτητα) για την οποία ισχύει ότι

$$s=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2s}{a}} \xrightarrow{[9],\ top\ equation} t=\sqrt{\frac{2ms}{F}} \quad [11]$$

θεωρώντας ως t = 0 τη στιγμή που αρχίζει η κίνηση του δίσκου. Περαιτέρω, ο δίσκος εκτελεί συγχρόνως και ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση υπό την επίδραση της τάσης του νήματος, για την οποία ισχύει ότι

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2 \xrightarrow[{[11]}]{[9],\ bottom\ equation} \theta=\frac{1}{2}\frac{2F}{mr}\frac{2ms}{F}=\frac{2s}{r} \quad [12]$$

Στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε το έργο της δύναμης F για την ταυτόχρονη περιστροφική κίνηση του δίσκου (όταν το Κ.Μ. του καλύπτει απόσταση s)

$$W_F'=rF\theta \xrightarrow{[12]} W_F'=2sF \quad [13]$$

Τέλος, το συνολικό έργο της δύναμης F προκύπτει από τις εξ.[10] και [13] και είναι ίσο προς

$$W_F^{total}=W_F+W_F'=Fs+2Fs=3Fs \quad [14]$$

απ’ όπου προκύπτει ότι **η σωστή απάντηση είναι η (γ)**.

ΘΕΜΑ 3ο

Α.1 Εξίσωση κίνησης για το συσσωμάτωμα μάζας $m + m_\beta$:

$$-F_{\varepsilon\lambda} = (m + m_\beta)a_m \approx ma_m \qquad [15]$$

Εξισώσεις κίνησης κυλίνδρου:

$$\begin{Bmatrix} F_{\varepsilon\lambda} - f = 2ma_K \\ f = mR\alpha_K \\ a_K = R\alpha_K \end{Bmatrix} \qquad [16]$$

Σημειώστε ότι θεωρήσαμε σαν θετική φορά κίνησης εκείνη προς τα δεξιά. Επειδή ο κύλινδρος θα κινηθεί προς τα δεξιά λόγω της επιμήκυνσης του ελατηρίου μετά την ενσφήνωση του βλήματος, η δεξιόστροφη (ωρολογιακή) περιστροφή του θα λάβει χώρα με τη βοήθεια της στατικής τριβής η οποία θα πρέπει να έχει φορά προς τα αριστερά. Οι εξ. [16] επομένως οδηγούν στο αποτέλεσμα ότι

$$f = ma_K \qquad [17]$$

Ο συνδυασμός της πρώτης σχέσης της εξ.[16] και της εξ.[17] οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι

$$F_{\varepsilon\lambda} = 3ma_K \qquad [18]$$

Τέλος ο συνδυασμός των εξ.[15] και [18] δίνει ότι:

$$\boxed{\frac{a_K}{a_m} \approx -\frac{1}{3}} \qquad [19]$$

Α.2 Από την Α.Δ.Ο. για το βλήμα – σώμα μάζας *m*, θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά, βρίσκουμε ότι

$$m_\beta \upsilon_0 = (m_\beta + m)V_0 \Rightarrow V_0 \approx \frac{m_\beta}{m}\upsilon_0 \qquad [20]$$

όπου V_0 είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την ενσφήνωση του βλήματος. Πηγαίνοντας πίσω στην εξ.[19], μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατα μέλη ως κάτωθι (χρησιμοποιώντας σωστά τις αρχικές συνθήκες -t = 0 - του προβλήματος)

$$\begin{aligned} & a_K \approx -\frac{1}{3}a_m \Rightarrow \int_0^t \frac{dv_K}{dt'}\,dt' \approx -\frac{1}{3}\int_0^t \frac{dv_m}{dt'}\,dt' \Rightarrow \int_0^{v_K} dv'_K \approx -\frac{1}{3}\int_{V_0}^{v_m} dv'_m \\ & \Rightarrow v_K \approx -\frac{1}{3}\left(v_m - V_0\right) \Rightarrow 3v_K \approx -v_m + V_0 \Rightarrow V_0 \approx 3v_K + v_m \end{aligned} \qquad [21]$$

Επιπλέον, κατά την μέγιστη δυνατή επιμήκυνση του ελατηρίου ισχύει ότι (το ελατήριο στιγμαία λειτουργεί όπως και το τεντωμένο μη-εκτατό νήμα)

$$\upsilon_K = \upsilon_m \tag{22}$$

Οπότε, από τον συνδυασμό των εξ.[21] και [22] βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\upsilon_K = \upsilon_m = \frac{V_0}{4} = \frac{m_\beta}{m}\frac{\upsilon_0}{4} \quad \left(\frac{m}{s}\right)} \tag{23}$$

Α.3 Η μέγιστη δυνατή επιμήκυνση του ελατηρίου θα βρεθεί από την Α.Δ.Ε. μεταξύ της στιγμής που σχηματίζεται το συσσωμάτωμα και της στιγμής της μέγιστης δυνατής επιμήκυνσης του ελατηρίου. Είναι λοιπόν:

$$\frac{1}{2}(m + m_\beta)V_0^2 \approx \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}2m\underbrace{R^2\omega^2}_{=\upsilon_K^2} + \frac{1}{2}2m\upsilon_K^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 \tag{24}$$

Περαιτέρω, συνδυάζοντας τις εξ.[20], [23] και [24], τελικά βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\Delta l_{\max} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{mk}}m_\beta \upsilon_0 \quad (m)} \tag{25}$$

Α.4 Για να έχουμε *κύλιση χωρίς ολίσθηση* πρέπει να ισχύει ότι

$$f \le \mu N \Rightarrow f \le 2\mu m g \tag{26}$$

όπου N η κάθετη αντίδραση που δέχεται ο κύλινδρος από το δάπεδο. Από την άλλη, ο συνδυασμός των εξ. [17] και [18] δίνει ότι

$$f = F_{\varepsilon\lambda} / 3 \tag{27}$$

και ως εκ τούτου από τις εξ. [26] και [27] βρίσκουμε ότι

$$\Delta l \le \frac{6\mu m g}{k} \tag{28}$$

όπου, ζητάμε η τελευταία σχέση να ισχύει πάντοτε κατά τη διάρκεια κίνησης του συστήματος κύλινδρος – σώμα μάζας *m*, δηλ. για κάθε Δl με $0 \le \Delta l \le \Delta l_{\max}$. Αν λοιπόν η συνθήκη της εξ.[28] ικανοποιείται για το $\Delta l_{\max}$, τότε προφανώς θα ισχύει καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης του συστήματος, και ως εκ τούτου από τις εξ.[25] και [28] βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{mk}}m_\beta \upsilon_0 \le \frac{6\mu m g}{k} \Rightarrow \upsilon_0 \le 4\mu g\frac{m}{m_\beta}\sqrt{\frac{3m}{k}} \tag{29}$$

Συνεπώς, η μέγιστη δυνατή ταχύτητα εκτόξευσης του βλήματος ώστε μετά την ενσφήνωσή του ο κύλινδρος να κυλίεται με ασφάλεια χωρίς ολίσθηση, είναι ίση προς

$$\boxed{\upsilon_0^{\max} = 4\mu g \frac{m}{m_\beta}\sqrt{\frac{3m}{k}} \quad \left(\frac{m}{s}\right)} \tag{30}$$

B. Για ταχύτητα εκτόξευσης του βλήματος ίση προς (εκ της εξ.[30])

$$\upsilon_0' = 2\upsilon_0^{\max} = 8\mu g \frac{m}{m_\beta}\sqrt{\frac{3m}{k}} \tag{31}$$

προκύπτει μία νέα ταχύτητα συσσωμάτωσης, η οποία είναι ίση προς

$$V_0' \approx \frac{m_\beta}{m} 2\upsilon_0^{\max} = 8\mu g\sqrt{\frac{3m}{k}} \tag{32}$$

και περαιτέρω, η εξ.[21] τροποποιείται ως ακολούθως

$$V_0' \approx 3\upsilon_K' + \upsilon_m' \tag{33}$$

Η Α.Δ.Ε. εφαρμοζόμενη μεταξύ της στιγμής αμέσως μετά τον σχηματισμό του συσσωματώματος και της στιγμής αμέσως πριν ξεκινήσει η ολίσθηση του κυλίνδρου δίνει ότι

$$\frac{1}{2}(m + m_\beta)V_0'^2 \approx \frac{1}{2}mV_0'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_m'^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}2m\underbrace{R^2\omega'^2}_{=\upsilon_K'^2} + \frac{1}{2}2m\upsilon_K'^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \tag{34}$$

ενώ, αμέσως πριν ξεκινήσει η ολίσθηση του κυλίνδρου, οι εξ.[26] ως [28] (που εξακολουθούν να ισχύουν) δίνουν ότι

$$\Delta l = \frac{6\mu m g}{k} \tag{35}$$

Ο συνδυασμός των εξ.[34] και [35] οδηγεί μετά από λίγες πράξεις στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$V_0'^2 = \upsilon_m'^2 + 3\upsilon_K'^2 + 36\mu^2 g^2 \frac{m}{k} \tag{36}$$

Τέλος, οι ζητούμενες ταχύτητες θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των εξ.[33] και [36]. Τα τελικά αποτελέσματα (δουλέψτε τα λίγο στο χαρτί σας) είναι:

$$\boxed{\upsilon_K' = \left(2\sqrt{3} - 3\right)\mu g\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \upsilon_m' = \left(2\sqrt{3} + 9\right)\mu g\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \left(\frac{m}{s}\right)} \tag{37}$$

Στο παραπάνω πρόβλημα το βλήμα ουσιαστικά χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να δοθεί ώθηση στο σώμα μάζας m – η μάζα του αγνοήθηκε δίπλα στη μάζα του σώματος m.

ΘΕΜΑ 4ο

Πριν προχωρήσουμε στη λύση της άσκησης θα αναφερθούμε σε ορισμένες λεπτομέρειες της εκφώνησης επί των οποίων όμως βασίζεται η επίλυση της άσκησης, αλλά και για όσους μπορεί να μην έδωσαν σημασία σε τέτοιες λεπτομέρειες. *Προκαταβολικά αναφέρουμε ότι η άσκηση απαιτεί εκτεταμένη φυσική σκέψη με αντάλλαγμα τις κάπως περιορισμένες πράξεις*!

Ερώτημα: *Η ανελαστική κρούση μεταξύ δοκού-Σ_1 γίνεται με το σώμα Σ_2 μόνο, ή με το σύστημα σώματος Σ_2 - βάσης Σ;*

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό έρχεται μέσα από την εκφώνηση της άσκησης η οποία αναφέρει ότι ... *ακριβώς αμέσως μόλις το ελατήριο ανακτά το φυσικό του μήκος, το σώμα Σ_2 συγκρούεται κεντρικά και τελείως ανελαστικά με το σώμα Σ_1* ... . Εφόσον μεταξύ του σώματος Σ_2 και της βάσης Σ δεν υπάρχει τριβή, το σώμα Σ_2 είναι συζευγμένο με τη βάση Σ είτε διαμέσου του ελατηρίου είτε εκ της απευθείας επαφής του με αυτό (το ένα κάθεται πάνω στο άλλο). Περαιτέρω, εφόσον το ελατήριο δεν είναι δεμένο στη βάση Σ, αυτό ουσιαστικά συνεπάγεται ότι το σώμα Σ_2 είναι ***ενεργειακά συζευγμένο*** *με τη βάση Σ μέσω του ελατηρίου μόνο σε περίπτωση που το ελατήριο είναι συμπιεσμένο, φέρνοντας σε έμμεση αλληλεπίδραση τα δύο σώματα* (το σώμα Σ_2 και τη βάση Σ). Εφόσον όμως η ανελαστική κρούση λαμβάνει χώρα αμέσως μόλις το ελατήριο ανακτήσει το φυσικό του μήκος, αυτό συνεπάγεται ότι η βάση Σ δεν είναι ενεργειακά συζευγμένη με το σώμα Σ_2 διαμέσου του ελατηρίου κατά την ανελαστική κρούση. Τι απέμεινε; ... μόνο η απευθείας επαφή μεταξύ του Σ_2 και της βάσης Σ, η οποία είναι μεν παρούσα πάντοτε, ακόμη και κατά το φαινόμενο της κρούσης, παρόλα αυτά όμως δεν οδηγεί σε ενεργειακή σύζευξη μεταξύ των δύο σωμάτων, δεδομένου ότι δεν υφίσταται καμία μεταβολή της ενέργειας του κάθε σώματος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση (δηλαδή κάθετα στο δάπεδο). Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα ότι *κατά το φαινόμενο της κρούσης τα σώματα Σ_2 και Σ δεν είναι ενεργειακά συζευγμένα μεταξύ τους, και ως εκ τούτου η βάση Σ δεν συμμετέχει στην ανελαστική κρούση!*

Μία περαιτέρω συνέπεια του γεγονότος ότι το Σ_2 'ελαστικά' (δηλαδή μέσω του ελατηρίου) απεμπλέκεται από τη βάση Σ αμέσως πριν την κρούση, είναι ότι κατά την κρούση δεν παρουσιάζεται καμία εξωτερική δύναμη (π.χ. λόγω του ελατηρίου) πάνω στη διεύθυνση κρούσης, που είναι η οριζόντια διεύθυνση. Όλα αυτά τα σημεία ένα προς ένα είναι σημαντικά προκειμένου να μπορέσουμε να ξεδιπλώσουμε σωστά τη λύση της άσκησης.

Α. Για τη λύση της άσκησης θα χρησιμοποιήσω το trick που χρησιμοποιήθηκε στο 4ο θέμα του 2ου κριτηρίου αξιολόγησης προκειμένου να κόψουμε δρόμο! Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να ακολουθήσει πιο συμβατικές μεθόδους λύσης για το υποερώτημα αυτό. Αρχικώς να σημειώσουμε ότι κάθε σημείο της δοκού, καθώς και το σώμα Σ_1 στο κάτω άκρο της, διατηρούν πάντοτε σταθερή απόσταση από το σημείο ανάρτησης Ο ... επομένως η σύνθετη κίνησή τους μπορεί να ιδωθεί *ως αμιγώς περιστροφική κίνηση περί το σημείο ανάρτησης Ο σε οιαδήποτε χρονική στιγμή*. Ως εκ τούτου λοιπόν, η ροπή αδράνειας του συστήματος δοκός-Σ_1 ως προς το Ο είναι

$$\mathrm{I_O} = \mathrm{I_\delta} + \mathrm{I_{\Sigma_1}} = \ldots\ Steiner's\ theorem\ \ldots = 2m\ell^2 \qquad [38]$$

Περαιτέρω, όσον αφορά στη μελέτη της ανελαστικής κρούσης, η οποία είναι σημειακή στην πράξη (και μόνον κατά την κρούση!), μπορώ να υποκαταστήσω το σύστημα δοκού-Σ1 με ένα εκκρεμές μάζας $2m$ και μήκους ℓ, αναρτημένο στο σημείο O (ένεκα της εξ.[38]). Συνεπώς, η μελέτη της κρούσης μεταξύ του συστήματος δοκός-Σ1 και του σώματος Σ2, μπορεί να αναχθεί σε μελέτη κρούσης ανάμεσα στο «ισοδύναμο εκκρεμές» και το σώμα Σ2 (τα οποία σημειωτέον έχουν την ίδια μάζα) . Προχωρώντας παρακάτω, έστω V_2 η άγνωστη ταχύτητα του σώματος Σ2 ακριβώς πριν την κρούση ως προς το έδαφος. Σε μία πλήρως ανελαστική κρούση μεταξύ του σώματος Σ2 και του «ισοδύναμου εκκρεμούς» το οποίο ήταν αρχικώς ακίνητο, ***ότι κινητική ενέργεια είχε το σώμα Σ2 πριν την κρούση ως προς τη βάση Σ μεταφέρεται εξ' ολοκλήρου στο σύστημα δοκού-Σ1, και το σώμα Σ2 ακινητοποιείται ως προς τη βάση Σ*** ... αυτό είναι το σημείο «κλειδί» της άσκησης!

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. μεταξύ της θέσης που έχει το σύστημα δοκός-Σ1 αμέσως μετά την κρούση (δηλαδή της κατακόρυφης θέσης), και της τελικής θέσης στην οποία σταματάει στιγμιαία ανερχόμενο κατά μία δοθείσα κατακόρυφη απόσταση ίση προς h, παίρνουμε

$$mgh + 3mg\left(\frac{\ell}{2} + h\right) = 0 + 3mg\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}(2m\ell^2)\Omega^2 \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{4gh}{\ell^2}} = \frac{2}{\ell}\sqrt{gh} \qquad [39]$$

Η ανωτέρω γωνιακή ταχύτητα είναι εκείνη με την οποίαν ξεκινά να περιστρέφεται το αρχικό σύστημα δοκού-Σ1 περί το σημείο O αμέσως μετά την ανελαστική κρούση, και αντιστοιχεί σε μια κινητική ενέργεια ίση προς

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\mathrm{I_O}\Omega^2 = \frac{1}{2}2m\ell^2\frac{4gh}{\ell^2} = 4mgh \qquad [40]$$

Σημειώνεται ότι στην εξ.[39] πήραμε ως επίπεδο αναφοράς της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, την οριζόντια στάθμη που διέρχεται από τα κέντρα μάζας των Σ1-Σ2 όταν αυτά είναι ακόμη ακίνητα. Ως συνέπεια της εξ.[40], αυτό που γνωρίζουμε μέχρι το σημείο αυτό είναι ότι η κινητική ενέργεια του σώματος Σ2, κατά την κρούση, μεταβλήθηκε κατά

$$\Delta\mathrm{K} = \mathrm{K}_f - \mathrm{K}_i = -4mgh \qquad [41]$$

όπου $\mathrm{K}_i \,/\, \mathrm{K}_f$ η κινητική ενέργεια του σώματος Σ2 ως προς έδαφος αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση ... και οι δύο όμως δεν είναι γνωστές ... πώς προχωράμε; ... αξιοποιούμε και τα υπόλοιπα δεδομένα της άσκησης ... και συγκεκριμένα εκείνο που αναφέρεται στην κίνηση της βάσης Σ. Ας εστιάσουμε όμως σε πρώτη φάση στην ξύλινη βάση και συγκεκριμένα στο τι συμβαίνει με αυτήν προ της κρούσης. Η μέγιστη στατική τριβή επί της βάσης Σ εκ του δαπέδου είναι ίση προς

$$T_{\max} = \mu N = \mu(2mg + 3mg) = 5\mu mg \qquad [42]$$

Από την άλλη, το ελατήριο αρχικώς κρατείται συμπιεσμένο κατά $s = 10\mu mg \,/\, k$, πράγμα που σημαίνει ότι κατά την στιγμή που το σύστημα Σ2-ελατήριο-Σ αφήνεται ελεύθερο, η βάση Σ δέχεται ακαριαία μία δύναμη προς τα δεξιά μέτρου $F = ks = 10\mu mg > T_{\max}$, οπότε, εφόσον δεν παρατηρείται καμία αναπήδηση, ξεκινάει αμέσως να κινείται προς τα δεξιά. Το δε σώμα Σ_2 ξεκινά να επιταχύνεται προς την αντίθετη κατεύθυνση υπό την επίδρασης της δύναμης του ελατηρίου. *Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι προ της ανελαστικής κρούσης τόσο το σώμα Σ_2 όσο και η βάση Σ είναι αμφότερα σε κίνηση.*

Θα προχωρήσουμε παραπέρα χρησιμοποιώντας ενεργειακά επιχειρήματα. Γνωρίζουμε ότι η αρχική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο σύστημα Σ_2-ελατήριο-Σ είναι ίση προς

$$E_i = \frac{1}{2}kS^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{10\mu mg}{k}\right)^2 = 50\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k} \quad (J) \qquad [43]$$

Μόλις το σύστημα Σ_2-ελατήριο-Σ αφεθεί ελεύθερο (και κοπεί και το νήμα επίσης), η ανωτέρω αποθηκευμένη ελαστική δυναμική ενέργεια μοιράζεται ανάμεσα στα σώματα Σ_2 και Σ, μετατρεπόμενη σε κινητική ενέργεια των αυτών σωμάτων κι επίσης σε θερμότητα κατά την κίνηση της βάσης Σ πάνω στο τραχύ δάπεδο. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι τελικώς, η βάση Σ με το σώμα Σ_2 πάνω της ακινητοποιείται πλήρως υπό την επίδραση των τριβών. Το δεδομένο αυτό σε συνδυασμό και με τα όσα αναφέρθηκαν για την ανελαστική κρούση πρωτύτερα, συνεπάγεται ότι η αρχική ελαστική δυναμική ενέργεια απωλέσθη συνολικά κατά τους εξής δύο τρόπους: (α) ένα μέρος της αφαιρέθηκε από το σύστημα Σ_2-ελατήριο-Σ και απήχθη από το σύστημα δοκού-Σ_1 μέσω της πλήρως ανελαστικής κρούσης, και (β) ότι απέμεινε μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω τριβών με το δάπεδο. Η απώλεια ενέργειας κατά το σκέλος (α) παραπάνω είναι ίση με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 (παραπομπή στην εξ.[41]). Όσον αφορά τώρα στο σκέλος (β) παραπάνω, το συνολικό έργο της τριβής ολίσθησης (καθόλη τη διάρκεια κίνησης της βάσης Σ με το σώμα Σ_2 επάνω της), είναι ίσο προς

$$\left|W_T\right| = 50\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k} - 4mgh \quad (J) \qquad [44]$$

Συνεπώς, η συνολική μετατόπιση της βάσης Σ μπορεί να βρεθεί εκ του ανωτέρω αποτελέσματος ως ακολούθως

$$\begin{aligned} &\left|W_T\right| = 50\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k} - 4mgh \Rightarrow \left|W_T\right| = 5\mu mgx = 50\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k} - 4mgh \Rightarrow \\ &5\mu x = 50\frac{\mu^2 mg}{k} - 4h \end{aligned} \qquad [45]$$

και τελικώς (η ζητούμενη μετατόπιση συμβολίστηκε ως x)

$$\boxed{x = 10\frac{\mu mg}{k} - \frac{4h}{5\mu} \quad (m) \qquad [46]}$$

Β. Το ερώτημα αυτό θέλει λίγη δουλειά γιατί όπως τονίστηκε στο προηγούμενο υποερώτημα σε κάποιο σημείο, οι κινητικές ενέργειες του σώματος Σ_2 πριν και μετά την κρούση δεν είναι γνωστές! Για να μπορέσουμε λοιπόν να προχωρήσουμε θα πρέπει να αξιοποιήσουμε όσα δεδομένα της άσκησης έμειναν αναξιοποίητα μέχρι τώρα! Κατ'αρχήν σύμφωνα με τα όσα ειπώθηκαν πριν την εξ.[43], η βάση δεν μπορεί να είναι ακίνητη εξ' αρχής. Περαιτέρω, το δεδομένο που αφορά στην διανυθείσα απόσταση της βάσης Σ ... υποννοεί ότι πριν την κρούση αλλά και κατά την κρούση η βάση Σ βρίσκεται σε κίνηση (απλώς γιατί γνωρίζουμε ότι δεν έχει καταφέρει να διανύσει την πλήρη απόσταση κατά την οποίαν εκτοπίστηκε). Saying so, ας συμβολίσουμε με V_{Σ} την ταχύτητα της βάσης Σ κατά τη στιγμή που απεμπλέκεται ενεργειακά από το σώμα Σ_2 (το οποίο εν συνεχεία συγκρούεται ανελαστικά με κάτι άλλο ...). Εφόσον, όπως ειπώθηκε προηγούμενα, η βάση Σ δεν συμμετέχει στην κρούση, και δεδομένου ότι η κρούση έχει αμελητέα διάρκεια, η ταχύτητα της βάσης Σ αμέσως μετά την κρούση είναι V_{Σ} (αμελητέα μεταβολή). Περαιτέρω, με βάση την παρατήτηση με τα έντονα μαύρα γράμματα του προηγούμενου υποερωτήματος ... αμέσως *μετά* την ανελαστική κρούση η ταχύτητα του σώματος Σ_2 θα είναι ίση προς V_{Σ} επίσης. Μετά την ανελαστική κρούση επομένως μπορούμε να δούμε το σύστημα Σ_2 – ελατήριο – βάση Σ ως ένα σώμα μάζας 5*m* το οποίο κάποια στιγμή ακινητοποιείται λόγω της τριβής ολίσθησης. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της στιγμής αμέσως μετά την κρούση, μέχρι και την πλήρη ακινητοποίηση, έχουμε ότι (αφού μετά την ανελαστική κρούση το Σ_2 ακινητοποιείται ως προς την βάση Σ, το ελατήριο παραμένει στο φυσικό του μήκος, το οποίο ανέκτησε ακριβώς πριν την κρούση, οπότε δεν συμμετέχει άλλο)

$$\mathrm{K}_f' - \mathrm{K}_i' = W_T' \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}5mV_{\Sigma}^2 = -5\mu mgs' \Rightarrow V_{\Sigma} = \sqrt{2\mu gs'} \qquad [47]$$

όπου s' είναι η απόσταση που διανύει η βάση Σ αμέσως μετά την κρούση μέχρι να ακινητοποιηθεί πλήρως. Αν συμβολίσουμε ως s την απόσταση που διανύει η βάση από την στιγμή της εκκίνησής της ως και την στιγμή της κρούσης, τότε θα ισχύει ότι

$$s + s' = x \qquad [48]$$

όπου x είναι η συνολική μετατόπιση της βάσης Σ που δίνεται από την εξ.[46] (κατά τον αμελητέο χρόνο της κρούσης δεν υφίσταται μετατόπιση της βάσης Σ). Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης ισχύει ότι $s = \frac{1}{2}x = 5\frac{\mu mg}{k} - \frac{2h}{5\mu}$, οπότε εκ της εξ.[48] (ή [46]) έχουμε ότι

$$s' = 5\frac{\mu mg}{k} - \frac{2h}{5\mu} \qquad [49]$$

Περαιτέρω, από τις εξ.[47] και [49] μπορούμε να βρούμε την κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την ανελαστική κρούση, η οποία προηγούμενα ορίστηκε ως K_f. Είναι λοιπόν

$$\mathrm{K}_f = \frac{1}{2}2mV_\Sigma^2 \xrightarrow{[47]} \mathrm{K}_f = 2m\mu g s' \xrightarrow{[49]} \mathrm{K}_f = 2\mu m g\left(5\frac{\mu m g}{k} - \frac{2h}{5\mu}\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{K}_f = 10\frac{(\mu m g)^2}{k} - \frac{4h}{5}mg \qquad [50]$$

Τέλος εκ των εξ.[41] και [50] μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως πριν την ανελαστική κρούση. Συγκεκριμένα είναι

$$\mathrm{K}_f - \mathrm{K}_i = -4mgh \Rightarrow \mathrm{K}_i = \mathrm{K}_f + 4mgh = 10\frac{(\mu m g)^2}{k} - \frac{4h}{5}mg + 4mgh \qquad [51]$$

οπότε

$$\boxed{\frac{1}{2}2mV_2^2 = 10\frac{(\mu m g)^2}{k} - \frac{4h}{5}mg + 4mgh \Rightarrow V_2 = \sqrt{10\mu^2 g\left(\frac{mg}{k}\right) + \frac{16}{5}gh} \quad (m\,/\,s) \qquad [52]}$$

όπου υπενθυμίζεται ότι προηγουμένως είχαμε ορίσει ως V_2 την άγνωστη ταχύτητα του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν την κρούση, ως προς το έδαφος.

Γ. Η περίπτωση αυτή είναι πιο απλή από τα προηγούμενα υποερωτήματα γιατί δεν εμφανίζεται τριβή ... . Περαιτέρω ας σημειωθεί ότι όλη η ανάλυση του υποερωτήματος (Α) μέχρι και πριν την εξ.[42] ισχύει και σε αυτή την περίπτωση αφού ως το σημείο εκείνο εστιάσαμε στην ανελαστική κρούση αποκλειστικά ... η οποία δεν συμπλέκεται με το αν το δάπεδο είναι λείο ή όχι (ακριβώς επειδή διαπιστώθηκε ότι η βάση Σ δεν συμμετέχει στην κρούση, πράγμα που εξακολουθεί να ισχύει και στην εν λόγω περίπτωση). Πηγαίνοντας τον συλλογισμό ένα βήμα πιο πέρα, συμπεραίνεται ότι η μόνη απώλεια ενέργειας που έχουμε στην εν λόγω περίπτωση είναι λόγω της ανελαστικής κρούσης και μόνον! Επομένως, αμέσως μετά την κρούση (το ελατήριο έχει ανακτήσει το φυσικό του μήκος όπως και πριν) η κινητική ενέργεια των σωμάτων Σ_2 και Σ είναι ίση προς

$$\mathrm{K}'_\Sigma + \mathrm{K}_{\Sigma_2} = 50\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k} - 4mgh' \qquad [53]$$

όπου το ύψος h' αντιπροσωπεύει τη νέα κατακόρυφη μετατόπιση της δοκού ΟΑ. Εφόσον δε η κρούση είναι ανελαστική, ισχύει και πάλι η παρατήρηση με τα έντοντα μαύρα γράμματα που σημειώθηκε στο υποερώτημα (Α), δηλαδή, το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται μετά την κρούση ως προς τη βάση Σ, και συνεπώς, τα δύο σώματα έχουν κοινή ταχύτητα μετά την κρούση (ως προς το έδαφος). Ως εκ τούτου λοιπόν θα ισχύει ότι (εκ της εξ.[53])

$$\frac{1}{2}5m\tilde{V}^2 = 50\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k} - 4mgh' \Rightarrow \ldots \Rightarrow \tilde{V} = \sqrt{20\frac{\mu^2 m g^2}{k} - \frac{8}{5}gh'} \qquad [54]$$

όπου $\tilde{V}$ ονομάστηκε η κοινή ταχύτητα των σωμάτων Σ_2 – Σ αμέσως μετά την ανελαστική κρούση του Σ_2 με το σύστημα δοκού-Σ_1. Επομένως, αμέσως μετά την ανελαστική κρούση τα σώματα Σ_2 και Σ έχουν τις κάτωθι κινητικές ενέργειες:

$$\left.\begin{aligned} K_{\Sigma_2}^{after} &= \frac{1}{2}2m\tilde{V}^2 = m\left(20\frac{\mu^2 mg^2}{k} - \frac{8}{5}gh'\right) \\ K_{\Sigma}^{after} &= \frac{1}{2}3m\tilde{V}^2 = \frac{3}{2}m\left(20\frac{\mu^2 mg^2}{k} - \frac{8}{5}gh'\right)\end{aligned}\right\}(J) \qquad [55]$$

Περαιτέρω, από τη διατήρηση της ενέργειας μεταξύ της αρχικής κατάστασης ισορροπίας του συστήματος Σ_2 – ελατήριο – βάση Σ, και της κατάστασης του αυτού συστήματος αμέσως πριν την κρούση, παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{2}2mV_{\Sigma_2}^2 + \frac{1}{2}3m\tilde{V}^2 = \frac{1}{2}kS^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{10\mu mg}{k}\right)^2 = 50\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k} \qquad [56]$$

όπου στο σημείο αυτό χρησιμοποιήσαμε (1ον) το γεγονός ότι η ανελαστική κρούση λαμβάνει χώρα αμέσως *μόλις* το ελατήριο ανακτήσει το φυσικό του μήκος (σύμφωνα με το ισχύον σκέλος της διαπίστωσης (α) στην εκφώνηση της άσκησης), και (2ον) το γεγονός ότι η εφόσον η βάση Σ δεν συμμετέχει στην κρούση η κινητική της κατάσταση δεν αλλάζει πριν και μετά την κρούση. Συνδυάζοντας τις εξ.[54] και [56] προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}2mV_{\Sigma_2}^2 + \frac{1}{2}3m\tilde{V}^2 = 50\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k} \Rightarrow V_{\Sigma_2}^2 + \frac{3}{2}\tilde{V}^2 = 50\frac{\mu^2 mg^2}{k} \Rightarrow \\ &V_{\Sigma_2} = \sqrt{50\frac{\mu^2 mg^2}{k} - \frac{3}{2}\tilde{V}^2}\end{aligned} \qquad [57]$$

και τελικώς

$$V_{\Sigma_2} = \sqrt{50\frac{\mu^2 mg^2}{k} - \frac{3}{2}\left(20\frac{\mu^2 mg^2}{k} - \frac{8}{5}gh'\right)} = \sqrt{20\frac{\mu^2 mg^2}{k} + \frac{12}{5}gh'} \qquad [58]$$

Επομένως, αμέσως πριν την ανελαστική κρούση τα σώματα Σ_2 και Σ έχουν τις κάτωθι κινητικές ενέργειες (σύμφωνα και με τις παρατηρήσεις κάτω από την εξ.[56])

$$\left.\begin{aligned} K_{\Sigma_2}^{before} &= \frac{1}{2}2mV_{\Sigma_2}^2 = m\left(20\frac{\mu^2 mg^2}{k} + \frac{12}{5}gh'\right) \\ K_{\Sigma}^{before} &= K_{\Sigma}^{after} = \frac{1}{2}3m\tilde{V}^2 = \frac{3}{2}m\left(20\frac{\mu^2 mg^2}{k} - \frac{8}{5}gh'\right)\end{aligned}\right\}(J) \qquad [59]$$

Λίγο ακόμη και τελειώσαμε ... μας έμειναν η δοκός ΟΑ και το σώμα Σ_1. Πριν την κρούση και τα δύο είναι ακίνητα οπότε

$$\boxed{\mathrm{K}_{\mathrm{OA}}^{before} = \mathrm{K}_{\Sigma_1}^{before} = 0} \qquad [60]$$

Τέλος, όσον αφορά το σύστημα δοκού-Σ_1, η Α.Δ.Ε. μεταξύ της αρχικής θέσης του εν λόγω συστήματος αμέσως μετά την κρούση και της θέσης στιγμιαίας ακινητοποίησης αυτού, οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι

$$\Omega' = \frac{2}{\ell}\sqrt{gh'} \qquad [61]$$

και ως εκ τούτου, η κινητική ενέργεια της δοκού αμέσως μετά την κρούση είναι

$$\boxed{\mathrm{K}_{\mathrm{OA}}^{after} = \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\mathrm{O}}\Omega'^2 = ... = \frac{1}{2}m\ell^2\frac{4}{\ell^2}gh' = 2mgh' \quad (J)} \qquad [62]$$

ενώ η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση είναι

$$\boxed{\mathrm{K}_{\Sigma_1}^{after} = \frac{1}{2}m(\Omega'\ell)^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\frac{4}{\ell^2}gh' = 2mgh' \quad (J)} \qquad [63]$$

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ