4º ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Αντικείμενο εξέτασης: Όλη η διδακτέα ύλη
Χρόνος εξέτασης: Απεριόριστος λόγω αυξημένου βαθμού δυσκολίας

ΘΕΜΑ 1ο

Στις ερωτήσεις 1-4 να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Δύο κυματομορφές (παλμοί) με εξισώσεις

$$y_1(x,t) = \frac{1}{(3x-4t)^2+1} \text{ (S.I.) και } y_2(x,t) = -\frac{1}{(3x+4t-6)^2+1} \text{ (S.I.)}$$

αντιστοίχως, διαδίδονται πάνω στο ίδιο γραμμικό, ομογενές και ισότροπο μονοδιάστατο ελαστικό μέσον το οποίο εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x΄Ox. Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι λανθασμένη;

α. Οι δύο κυματομορφές διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

β. Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποίαν οι δύο κυματομορφές συμβάλλουν αναιρετικά σε οποιοδήποτε σημείο του ελαστικού μέσου.

γ. Υπάρχει σημείο του ελαστικού μέσου στο οποίο οι δύο κυματομορφές συμβάλλουν αναιρετικά σε κάθε χρονική στιγμή.

δ. Οι δύο κυματομορφές διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες.

Μονάδες 5

2. Δύο οδεύοντα κύματα με εξισώσεις

$$y_1(x,t) = A\ \eta\mu(kx-\omega t) \text{ και } y_2(x,t) = A\ \eta\mu(kx+\omega t) \text{ (S.I.)}$$

διαδίδονται κατά μήκος της ίδιας χορδής και ως αποτέλεσμα της επαλληλίας τους σχηματίζεται στάσιμο κύμα. Επαναλαμβάνουμε το όλο πείραμα με μόνη διαφορά ότι εισάγεται μια σχετική διαφορά φάσης φ μεταξύ των αντίθετα οδευόντων κυμάνσεων, και παρατηρούμε ότι οι θέσεις δεσμών και κοιλιών εναλλάσονται μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Πόση μπορεί (δηλ. είναι δυνατόν) να είναι η σχετική διαφορά φάσης που εισήχθη;

α. Ίση με ακέραιο πολλαπλάσιο του π

β. Ίση με περιττό μόνο πολλαπλάσιο του π

γ. Ίση με περιττό μόνο πολλαπλάσιο του π/2

δ. Ίση με ακέραιο πολλαπλάσιο του π/2

Μονάδες 5

3. Ένα λάστιχο ποτίσματος ομοιόμορφης διατομής διαμέτρου 1 cm συνδέεται από τη μία μεριά του με βρύση, ενώ το άλλο άκρο του είναι κλειστό μεν αλλά φέρει 25 μικρές κυκλικές οπές διαμέτρου 0.05 cm η κάθε μία. Ανοίγουμε τη βρύση και όταν αποκαθίσταται στρωτή ροή η ταχύτητα του νερού κοντά στην έξοδο του λάστιχου είναι 2 m/s. Με ποια ταχύτητα εξέρχεται το νερό από μία οιαδήποτε οπή του λάστιχου;

α. Με ταχύτητα μέτρου ίσου προς 2 m/s.

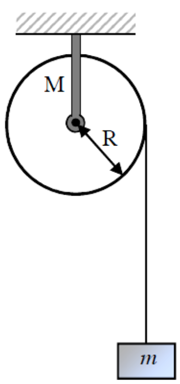
β. Με ταχύτητα μέτρου ίσου προς 50 m/s.

γ. Με ταχύτητα μέτρου ίσου προς 32 m/s.

δ. Με ταχύτητα μέτρου ίσου προς 0.08 m/s.

Μονάδες 5

4. Στο διπλανό σχήμα ο δίσκος μάζας M και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο του σχήματος. Αβαρές και μη εκτατό νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από την περιφέρεια του δίσκου, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται με σώμα μάζας m. Το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία. Αρχικώς το όλο σύστημα ισορροπεί, και τη χρονική στιγμή t = 0 ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος να περιστραφεί, ενώ το σώμα μάζας m κατέρχεται κατακόρυφα. Πόσο έχει κατέλθει κατακόρυφα το σώμα μάζας m ως τη στιγμή που ένα οιοδήποτε σημείο της περιφέρειας του δίσκου έχει ίσες κατά μέτρο εφαπτομενική και κεντρομόλο επιτάχυνση; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g, και η ροπή αδράνειας δίσκου ως προς τον κύριο άξονα συμμετρίας του $I_{CM} = 1/2MR^2$.



α. Έχει κατέλθει κατά μια κατακόρυφη απόσταση ίση με R.

β. Έχει κατέλθει κατά μια κατακόρυφη απόσταση ίση με 2R.

γ. Έχει κατέλθει κατά μια κατακόρυφη απόσταση ίση με R/2.

δ. Έχει κατέλθει κατά μια κατακόρυφη απόσταση ίση με R/4.

Μονάδες 5

5. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα καθεμιάς από τις προτάσεις που ακολουθούν και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ** αν η πρόταση που παρατίθεται είναι σωστή ή **Λ** αν είναι λανθασμένη.*

Α. Η εξίσωση της συνέχειας ισχύει μόνο για ιδανικά ρευστά.

Β. Η αρχή του Pascal ισχύει μόνο για ασυμπίεστα ρευστά.

Γ. Η εξίσωση της συνέχειας ισχύει μόνο κατά την στρωτή ροή ενός ασυμπίεστου ρευστού.

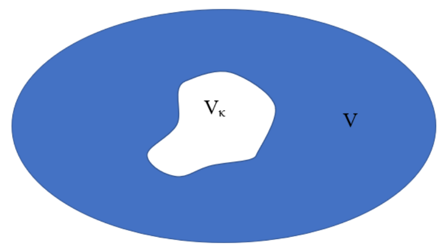
Δ. Η εξίσωση του Bernoulli μπορεί να *εφαρμοστεί* μόνο κατά την στρωτή ροή ενός οιουδήποτε ρευστού.

Ε. Η εμβέλεια του πίδακα που αναδύεται από μία οριζόντια σύρριγγα που βρίσκεται σε κάποιο ύψος πάνω από το έδαφος, είναι ανάλογη της σταθερής ταχύτητας με την οποία σπρώχνεται το έμβολο της σύρριγγας, και ανεξάρτητη από την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

1. Σώμα ομοιόμορφης πυκνότητας ρ και όγκου V φέρει μία κενή ακανόνιστη κοιλότητα στο *εσωτερικό* του (δηλαδή δεν είναι ορατή απ' έξω), όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



1.Α Να περιγράψετε λεπτομερώς (και με βάση την ύλη του σχολικού βιβλίου) έναν απλό τρόπο με τον οποίον θα μπορούσε να υπολογιστεί ο όγκος $V_κ$ της σχηματιζόμενης κοιλότητας.

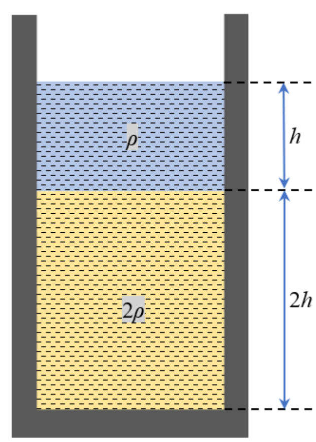
Μονάδες 4

1.Β Να υπολογίσετε σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδό σας τον όγκο της κοιλότητας συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης καθώς και μεγεθών που κρίνετε εσείς απαραίτητα.

Μονάδες 3

2. *Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Το δοχείο του διπλανού σχήματος περιέχει δύο υγρά τα οποία δεν αναμιγνύονται με πυκνότητες ρ και 2ρ αντίστοιχα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



2.Α Το δοχείο επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με επιτάχυνση μέτρου g/5. Αν θεωρήσουμε ένα σημείο Α στην ελεύθερη επιφάνεια και ένα σημείο Β στον πυθμένα του δοχείου, πόση είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ των ανωτέρω σημείων;

α. Είναι ίση προς 4ρgh.

β. Είναι ίση προς 5ρgh.

γ. Είναι ίση προς 6ρgh.

Μονάδες 2

2.Β Μεταφέρουμε το δοχείο του παραπάνω σχήματος σε έναν πλανήτη στον οποίον το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι $g' = g / 5$. Αν θεωρήσουμε ένα σημείο Α στην ελεύθερη επιφάνεια και ένα σημείο Β στον πυθμένα του δοχείου, πόση είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ των ανωτέρω σημείων;

α. Είναι ίση προς $\rho gh/5$.

β. Είναι ίση προς ρgh.

γ. Είναι ίση προς $5\rho gh$.

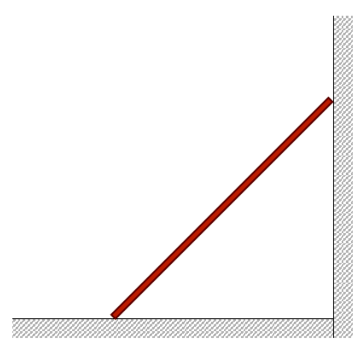
Μονάδες 2

2.Γ Ανοίγουμε μία πολύ μικρή οπή στον πυθμένα του παραπάνω δοχείου. Δεχόμενοι ότι η στρωτή εκροή αποκαθίσταται ακαριαία, αγνοώντας τυχόν τριβές με τα τοιχώματα του δοχείου, και δεχόμενοι ότι τα δύο υγρά συμπεριφέρονται σαν ιδανικά μη αναμίξιμα ρευστά, διαπιστώνουμε ότι η (κατακόρυφα προς τα κάτω) *στρωτή εκροή* από τον πυθμένα του δοχείου συντελείται με μία ταχύτητα (εκκίνησης) μέτρου V_1 στην περίπτωση του υποερωτήματος **2.Α**, και με μία ταχύτητα (εκκίνησης) μέτρου V_2 στην περίπτωση του υποερωτήματος **2.Β**. Ποια είναι η τιμή του λόγου V_1/V_2; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 4

3. *Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στη διάταξη του διπλανού σχήματος μια σκάλα στηρίζεται σε λείο κατακόρυφο τοίχο, ενώ μεταξύ της σκάλας και του οριζοντίου δαπέδου υπάρχει τριβή. Τοποθετούμε την σκάλα έτσι ώστε να ισορροπεί ‘οριακά’. Ένα βαρίδιο ίδιας μάζας με τη σκάλα τοποθετείται πολύ προσεκτικά στη θέση του κέντρου μάζας της σκάλας. Τι από τα ακόλουθα επρόκειτο να συμβεί στο σύστημα σκάλας-βαριδίου;



α. Περιέρχεται σε ασταθή κατάσταση και κατόπιν σε μια νέα κατάσταση ‘οριακής’ ισορροπίας καθώς η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο δάπεδο μειώνεται.

β. Παραμένει στην ίδια κατάσταση ‘οριακής’ ισορροπίας (ίδια με εκείνη πριν την τοποθέτηση του βαριδίου).

γ. Περιέρχεται σε ασταθή κατάσταση και η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο δάπεδο διαρκώς μειώνεται.

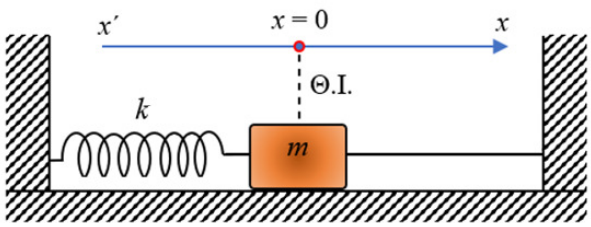
Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

4. *Στην ερώτηση που ακολουθεί, να γράψετε στο φύλλο απαντήσεών σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στη διάταξη του παρακάτω σχήματος, το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο και το ελατήριο που είναι δεμένο στην αριστερή μεριά του σώματος μάζας m είναι ιδανικό, με σταθερή επαναφοράς ίση προς k. Το νήμα που είναι δεμένο στο ίδιο σώμα, στη δεξιά μεριά του, είναι αβαρές και μη εκτατό. Αρχικώς, το σώμα μάζας m ισορροπεί στη θέση $x = 0$ του οριζόντιου άξονα $x'x$, με το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος και το νήμα να είναι οριζόντιο αλλά μη τεταμένο.



Αν εκτρέψουμε το σώμα μάζας m ελαφρώς προς τα δεξιά, τι είδους κίνηση θα εκτελέσει αμέσως μόλις αφεθεί ελεύθερο;

α. Θα εκτελέσει αμείωτη αρμονική ταλάντωση με περίοδο ίση προς $\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

β. Θα εκτελέσει φθίνουσα αρμονική ταλάντωση με περίοδο ελαφρώς μικρότερη από την τιμή $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

γ. Θα σταματήσει αμέσως μόλις διέλθει από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά.

Μονάδες 2

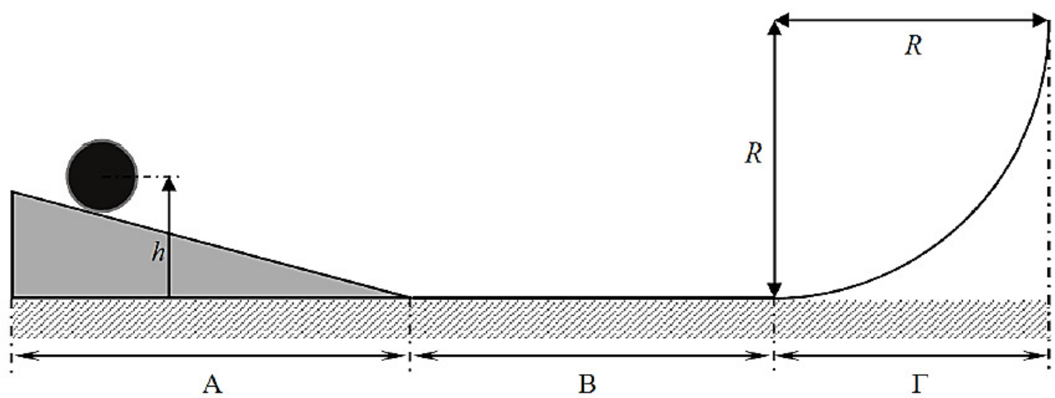
Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3ο

Η διάταξη του παρακάτω σχήματος αποτελείται από μία κεκλιμένη επιφάνεια (περιοχή Α), μία οριζόντια επιφάνεια (περιοχή Β) έκτασης Δs_B, κι ένα τεταρτοκύκλιο (περιοχή Γ) ακτίνας R. Ομογενής και συμπαγής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας r ($r < R$) αφήνεται να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από ύψος h πάνω από την οριζόντια επιφάνεια. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και της κεκλιμένης επιφάνειας είναι μ, ενώ με την οριζόντια επιφάνεια (περιοχή Β) και το τεταρτοκύκλιο (περιοχή Γ) δεν παρουσιάζεται τριβή. Οι περιοχές Α και Β συνδέονται αρκετά ομαλά η μία με την άλλη έτσι ώστε απλώς να μην παρατηρείται κάποια αναπήδηση ή γλίστρημα του κυλίνδρου κατά την μετάβαση από την περιοχή Α στην περιοχή Β (σημειώνεται ότι η γωνία κλίσης της κεκλιμένης επιφάνειας μηδενίζεται ακαριαία κατά την μετάβαση από την περιοχή Α στην περιοχή Β και όχι βαθμιαία). Η γωνία κλίσης (ως προς το οριζόντιο δάπεδο) της κεκλιμένης επιφάνειας είναι η μισή της μέγιστης δυνατής γωνίας κλίσης για την οποίαν ο κύλινδρος κατέρχεται κυλιόμενος χωρίς ολίσθηση.

<u>Ισχύουν επιπλέον τα εξής</u>: Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g, ότι $\Delta s_B = R$, κι επίσης, η ροπή αδράνειας κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας r ως προς άξονα που συμπίπτει με τον κύριο άξονα συμμετρίας του $I_{CM} = ½ Mr^2$. Θεωρήστε ως στάθμη αναφοράς της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο της περιοχής Β.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον.

Α. Να υπολογίσετε την γωνία κλίσης ϕ της κεκλιμένης επιφάνειας.

Μονάδες 5

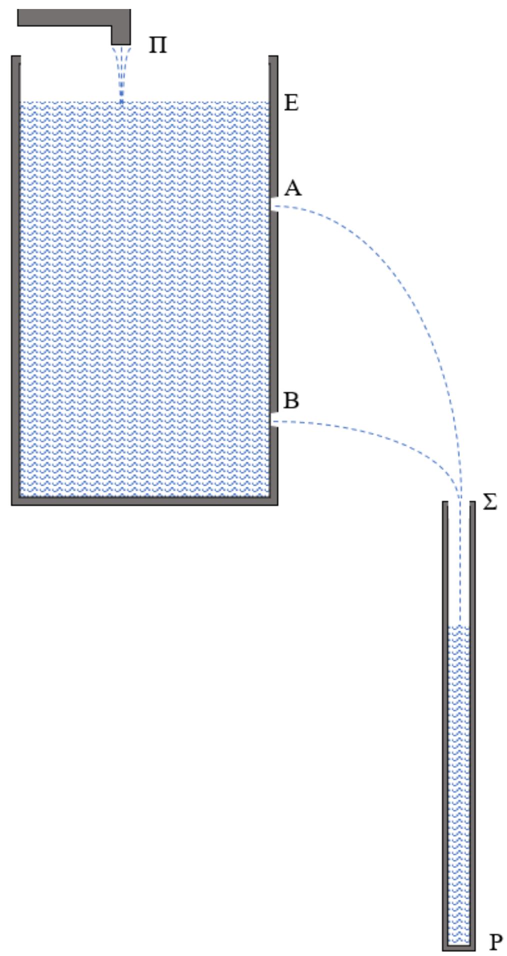
Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν διατρέχει την οριζόντια επιφάνεια (περιοχή Β). Αν τυχόν γίνει προσέγγιση να αναφερθεί ρητά.

Μονάδες 8

Γ. Αν είναι γνωστό ότι ο κύλινδρος διετέλεσε N περιστροφές από την στιγμή που εισήλθε στο τεταρτοκύκλιο ως και την στιγμή που σταματάει στιγμιαία την ανοδική κίνησή του σε αυτό, να βρείτε σε πόσο χρόνο, *μετρούμενο από την στιγμή που αφέθηκε ελεύθερος*, ο κύλινδρος αλλάζει φορά κίνησης στο τεταρτοκύκλιο (δηλ. ξεκινά να κατέρχεται) καθώς και την συνολική απόσταση που διήνυσε στο παραπάνω (ζητούμενο) χρονικό διάστημα.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο



Στο πάνω μέρος της διάταξης του διπλανού σχήματος, ο οριζόντιος σωλήνας τροφοδοτεί με νερό την δεξαμενή από κάτω υπό σταθερή παροχή. Η δεξαμενή είναι κυλινδρική με ομοιόμορφη διατομή ακτίνας R, και φέρει δύο μικρές κυλινδρικές οπές ομοιόμορφης διατομής ακτίνας r (όπου $r << R/100$) στις θέσεις Α και Β, ως προς τον πυθμένα της δεξαμενής. Στα δεξιά της δεξαμενής υπάρχει στενός κυλινδρικός σωλήνας ύψους L και ομοιόμορφης διατομής ακτίνας 10r, ο οποίος επίσης φέρει μικρή κυκλική οπή ακτίνας r στο κέντρο του πυθμένα του. Το πάνω άκρο Σ του σωλήνα βρίσκεται στο ίδιο ύψος με τον πυθμένα της δεξαμενής. Αρχικώς, οι οπές στις θέσεις Α και Β κρατούνται σφραγισμένες μέχρι να γεμίσει η δεξαμενή και η ελεύθερη επιφάνεια του νερού να ανέλθει αρκετά υψηλότερα από την οριζόντια στάθμη που διέρχεται από την θέση της οπής Α, ενώ ο σωλήνας ΣΡ είναι άδειος και η οπή που φέρει στον πυθμένα του διατηρείται διαρκώς σφραγισμένη. Μόλις η ελεύθερη επιφάνεια του νερού ανέλθει αρκετά ψηλά (χωρίς να υπερχειλίσει η δεξαμενή), οι οπές της δεξαμενής (και μόνον αυτές) ξεσφραγίζονται *ταυτόχρονα*, και κατά την στρωτή ροή (η οποία χάρην ευκολίας θεωρούμε ότι αποκαθίσταται ακαριαία μετά το ξεσφράγισμα των οπών της δεξαμενής) παρατηρείται ότι οι πίδακες που εξέρχονται από τις δύο οπές στα σημεία Α και Β της δεξαμενής συναντιώνται δίπλα στον άξονα συμμετρίας του κυλινδρικού σωλήνα ΣΡ, οπότε τον γεμίζουν σταδιακά με νερό. Η απόσταση του άξονα συμμετρίας του σωλήνα ΣΡ από το δεξιό κατακόρυφο τοίχωμα της δεξαμενής είναι s, ενώ η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο οπών είναι ίση προς $2s$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα συναρτήσει των δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον.

Α. Αν Ε είναι η ελεύθερη επιφάνεια του νερού κατά την στρωτή ροή να βρεθεί η υψομετρική απόστασή της από τον πυθμένα της δεξαμενής. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Β. Πόσο θα έπρεπε να μεταβληθεί η τρέχουσα σταθερή παροχή τροφοδοσίας, ώστε αν τυχόν ξεσφραγίζονταν η μία μόνο από τις δύο οπές, να ήταν και πάλι δυνατό (εφικτό) το γέμισμα του σωλήνα ΡΣ κατά τη στρωτή ροή; Αγνοήστε την έκταση της διατομής του σωλήνα ΡΣ σε σχέση με την εμβέλεια του πίδακα στον συγκεκριμένο υπολογισμό σας.

Μονάδες 6

Γ. Μόλις ο σωλήνας ΡΣ γεμίσει κατά το μισό του ξεσφραγίζεται ακαριαία και η οπή στον πυθμένα Ρ του σωλήνα. Να υπολογίσετε πόσος χρόνος χρειάζεται συνολικά μέχρι να αρχίσει να *υπερχειλίζει* ο σωλήνας (μετρούμενος από τη στιγμή που ξεκινάει το γέμισμα του σωλήνα), κατά <u>τις παρακάτω εξής περιπτώσεις</u>:

(α) όταν και οι δύο οπές της δεξαμενής είναι ξεσφραγισμένες μόλις αρχίζει το γέμισμα του σωλήνα ΡΣ,

και

(β) όταν η μία μόνο από τις δύο οπές της δεξαμενής είναι ξεσφραγισμένη μόλις αρχίζει το γέμισμα του σωλήνα ΡΣ.

Στο παραπάνω υποερώτημα δεχτείτε ότι η στρωτή ροή αποκαθίσταται ακαριαία στον σωλήνα ΡΣ μετά το ξεσφράγισμα της οπής στον πυθμένα του.

Μονάδες 11

Για την επίλυση της παραπάνω άσκησης το νερό να ιδωθεί ως ιδανικό ασυμπίεστο ρευστό, κι επίσης, παντώς είδους τριβές με τα τοιχώματα της δεξαμενής ή το στόμιο των οπών ή τα τοιχώματα του σωλήνα ΡΣ να θεωρηθούν αμελητέες. Η αντίσταση του αέρα στην κίνηση του ρευστού κατά τη μετάβαση από την δεξαμενή στον σωλήνα ΡΣ επίσης να θεωρηθεί αμελητέα. Στην άσκηση αυτή, στο τελευταίο υποερώτημα, εξαιτίας των πολύπλοκων αλγεβρικών πράξεων που θα συσσωρευτούν καθ' οδόν θα χρειαστεί να κάνετε κάποιες αριθμητικές προσεγγίσεις για να καταλήξετε σε κάποιο συμμαζεμένο τελικό αποτέλεσμα.

<u>ΤΕΛΟΣ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ</u>

4ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αντικείμενο εξέτασης: Όλη η διδακτέα ύλη

Απαντήσεις των ασκήσεων

ΘΕΜΑ 1ο

1. (δ), 2. (β), 3. (γ), 4. (γ), 5.Α (Λ), 5.Β (Λ), 5.Γ (Λ), 5.Δ (Λ), 5.Ε (Λ)

Ως περαιτέρω εξάσκηση προσπαθείστε να εξηγήσετε αναλυτικά (εφόσον οι ερωτήσεις δεν σας φαίνονται τετριμμένες) τα αποτελέσματα κάθε ερώτησης πολλαπλής επιλογής και Σωστού-Λάθους (αν και οι συγκεκριμένες ερωτήσεις Σ-Λ είναι κατά βάση ερωτήσεις ελέγχου γνώσης κάποιων βασικών θεωρητικών αποτελεσμάτων).

ΘΕΜΑ 2ο

1.Α Το ερώτημα αυτό φαίνεται δύσκολο εκ πρώτης όψεως ... παρόλα αυτά με αρκετή σκέψη ίσως θα μπορούσε το μυαλό κάποιου να πάει στην έννοια του 'φαινόμενου βάρους' ενός αντικειμένου βυθισμένου μέσα σε υγρό. Θα μπορούσαμε λοιπόν να κάνουμε το εξής απλό πείραμα: Βυθίζουμε το σώμα σε υγρό γνωστής πυκνότητας, και κατόπιν μετράμε το φαινόμενο βάρος του σώματος όταν είναι βυθισμένο μέσα στο υγρό. Η ελάττωση του βάρους του σώματος μέσα στο υγρό (σε σχέση με τον αέρα) οφείλεται ως γνωστόν στη δύναμη της άνωσης εκ του υγρού … αν θέλετε μπορείτε να πάτε ένα βήμα πιο πέρα και να αναπτύξετε ένα σκεπτικό γύρω από το πώς μπορεί να γίνει μια μέτρηση του φαινόμενου βάρους, όμως η παραπάνω απάντηση αρκεί.

1.Β Για να κάνουμε λοιπόν μερικούς απλούς υπολογισμούς. Η μάζα του περίεργου σώματος είναι m = ρV, το δε βάρος του στον αέρα είναι W = mg = ρVg. Ας υποθέσουμε ότι το φαινόμενο βάρος του σώματος είναι W΄. Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο υποερώτημα θα ισχύει ότι

$$F_{buoyant} = W - W' = \rho_{\upsilon} g (V_k + V) = W - W' \qquad [1]$$

όπου λάβαμε υπόψη το γεγονός ότι εφόσον η κοιλότητα είναι εσωτερική δεν πληρούται από υγρό κατά την βύθιση του σώματος στο υγρό, και ως εκ τούτου συμμετέχει στον εκτοπιζόμενο όγκο υγρού. Ο όγκος της κοιλότητας μπορεί περαιτέρω να υπολογιστεί από την εξ.[1], ήτοι

$$V_k + V = \frac{W - W'}{\rho_{\upsilon} g} \Rightarrow V_k = \frac{W - W'}{\rho_{\upsilon} g} - V = \frac{\rho g V - W'}{\rho_{\upsilon} g} - V \qquad [2]$$

Πέρα από τα δεδομένα της άσκησης, απαιτείται επιπλέον να γνωρίζουμε λοιπόν τα εξής: (α) την πυκνότητα του υγρού, και (β) το μετρούμενο φαινόμενο βάρος.

2.Α Κατά την ανοδική επιταχυνόμενη κίνηση του δοχείου κατακόρυφα, η επιτάχυνση της βαρύτητας για το υγρό αλλάζει από g σε $g_{eff} = g + g/5 = 6g/5$. Έστω p_A η πίεση στο σημείο Α. Τότε η πίεση στο σημείο Γ, που είναι η προβολή του Α πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών, βρίσκεται ίση με $p_Γ = p_A + ρ\, g_{eff}\, h$. Περαιτέρω, η πίεση στο σημείο Β (που είναι η προβολή του Α στον πυθμένα του δοχείου) δίνεται από τη σχέση $p_B = p_Γ + 2ρ\, g_{eff}\, 2h = p_A + ρ\, g_{eff}\, h + 2ρ\, g_{eff}\, 2h = p_A + 5ρ\, g_{eff}\, h$. Τέλος, η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Α και Β βρίσκεται ως

$$\Delta p_{AB} = 5\rho g_{eff} h \qquad [3]$$

Η εξ.[3] στο εν λόγω υποερώτημα οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι $\Delta p_{AB} = 5\rho \frac{6g}{5} h = 6\rho g h$, οπότε η σωστή απάντηση είναι η **(γ)**.

2.Β Για να απαντήσουμε στο υποερώτημα αυτό μπορούμε να επαναλάβουμε την διαδικασία του προηγούμενου υποερωτήματος ή απλώς να χρησιμοποιήσουμε αμέσως την εξ.[3], η οποία οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι $\Delta p'_{AB} = 5\rho \frac{g}{5} h = \rho g h$. Συνεπώς η σωστή απάντηση είναι η **(β)**.

2.Γ Θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει το θεώρημα του Toricelli, όμως εμφανίζεται μία δυσκολία στη συγκεκριμένη περίπτωση ... η στήλη του υγρού που περιέχεται στο δοχείο δεν είναι ομογενής, αφού η πυκνότητά της αλλάζει απότομα (σύμφωνα με την υπεραπλουστευμένη υπόθεση της πλήρους μη-ανάμιξης των δύο ιδανικών υγρών) από τον πυθμένα προς την ελεύθερη επιφάνεια. Θα προχωρήσουμε λοιπόν με βάση την εξής προσέγγιση: μόλις αποκατασταθεί στρωτή εκροή και για κάποιο χρονικό διάστημα (πόσο ακριβώς δεν ενδιαφέρει γιατί η άσκηση αναφέρεται σε *ταχύτητες εκκίνησης* της στρωτής εκροής), το πάνω υγρό μπορεί να ιδωθεί απλά ως ένα ομογενές και ομοιόμορφο έμβολο πάχους h και πυκνότητας ρ, που ασκεί ομοιόμορφη πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του κάτω υγρού πυκνότητας 2ρ. Η πίεση που δέχεται η «ελεύθερη επιφάνεια» του κάτω υγρού είναι ίση προς

$$p_{\Gamma} = p_{A} + \rho g_{eff} h \qquad [4]$$

όπου Γ είναι ένα σημείο της διαχωριστικής επιφάνειας των δύο υγρών (ως ορίστηκε στα προηγούμενα υποερωτήματα). Μπορούμε περαιτέρω να υποκαταστήσουμε το πάνω υγρό ή εν δυνάμει έμβολο με μία στήλη υγρού πυκνότητας 2ρ και ύψους Η, τέτοιου ώστε να ικανοποιείται η απαίτηση της εξ.[4] σε υψομετρική απόσταση 2h από τον πυθμένα του δοχείου ... ήτοι

$$\left.\begin{cases} p_{\Gamma} = p_{A} + \rho g_{eff} h \\ p_{\Gamma} = p'_{A} + 2\rho g_{eff} H \end{cases}\right\} \Rightarrow p'_{A} + 2\rho g_{eff} H = p_{A} + \rho g_{eff} h \xrightarrow{p'_A = p_A} H = h/2 \qquad [5]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα σημεία Α και Α΄ είναι στην ελεύθερη επιφάνεια σε κάθε περίπτωση. Αυτό που ουσιαστικά κάναμε στην εξ.[5] είναι το εξής: Υπό την απαίτηση να μην αλλάξει η πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών, αντικαταστήσαμε την στήλη του υγρού πυκνότητας ρ και ύψους h, με μία ισοδύναμη (ως προς τα της πίεσης) στήλη υγρού πυκνότητας 2ρ και ύψους H = h/2. Ε και λοιπόν; ... με αυτό τον τρόπο δεν χρειάζεται να χειριστούμε την αρχική μη-ομογενή στήλη υγρού και αντ' αυτού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία ομογενή στήλη υγρού πυκνότητας 2ρ και συνολικού ύψους h_{eff} = 2h + H = 2h + h/2 = 5h/2 … σε αυτή την περίπτωση μπορούμε αμέσως να επικαλεστούμε το γνωστό αποτέλεσμα του Toricelli! Για την περίπτωση του υποερωτήματος Α βρίσκουμε ότι $V_1 = \sqrt{2g_{eff}h_{eff}} = \sqrt{2\frac{6g}{5}\frac{5h}{2}} = \sqrt{6gh}$, ενώ για την περίπτωση του υποερωτήματος Β βρίσκουμε ότι $V_2 = \sqrt{2g_{eff}h_{eff}} = \sqrt{2\frac{g}{5}\frac{5h}{2}} = \sqrt{gh}$. Τέλος, ο ζητούμενος λόγος για τις ταχύτητες εκκίνησης της στρωτής εκροής είναι

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{6gh}}{\sqrt{gh}} = \sqrt{6} \qquad [6]}$$

3. Ο όρος 'οριακή ισορροπία' υπονοεί ότι

$$\mathrm{T}_\sigma = \mu_\sigma \mathrm{N}_2 \qquad [7]$$

όπου μ_σ ο συντελεστής στατικής τριβής με το δάπεδο και N_2 η κάθετη αντίδραση από το δάπεδο. Επειδή η σκάλα *ισορροπεί*, έχουμε κατά την κατακόρυφη διεύθυνση ότι

$$\mathrm{N}_2 = \mathrm{M}g \qquad [8]$$

όπου M η μάζα της σκάλας, και κατά την οριζόντια διεύθυνση ότι

$$\mathrm{T}_\sigma = \mathrm{N}_1 \qquad [9]$$

όπου N_1 η κάθετη αντίδραση από τον λείο τοίχο. Τέλος, ο μηδενισμός των ροπών ως προς το σημείο επαφής σκάλας και οριζοντίου δαπέδου οδηγεί στην εξίσωση

$$\mathrm{M}g = (L / x)\cdot tan\theta \cdot \mathrm{N}_1 \qquad [10]$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο δάπεδο, L το μήκος της, και x η απόσταση του κέντρου μάζας της σκάλας από το σημείο επαφής της με το δάπεδο, μετρημένη κατά μήκος της σκάλας. Ο συνδυασμός των εξ.[8] και [10] δίνει ότι

$$\mathrm{N}_2 = (L / x)\cdot tan\theta \cdot \mathrm{N}_1 \qquad [11]$$

ενώ ο συνδυασμός των εξ. [7] και [9] δίνει ότι

$$\mathrm{N}_1 = \mu_\sigma \mathrm{N}_2 \qquad [12]$$

Συνδυάζοντας τις εξ. [11] και [12] βρίσκουμε ότι

$$(L\ /\ x)\cdot tan\theta\ \ = 1\ /\ \mu_{\sigma} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad [13]$$

Η προσεκτική τοποθέτηση ενός βαριδίου ίδιας μάζας με τη σκάλα, δηλ. μάζας M, στη θέση του κέντρου μάζας της σκάλας δεν οδηγεί σε μετατόπιση του κέντρου μάζας (κατά το μήκος της σκάλας) συνεπώς η απόσταση x παραμένει ίδια και εκ της εξ. [13] συμπεραίνουμε ότι πρέπει και η tanθ να παραμένει ίδια (αφού L = σταθ. και το x δεν αλλάζει), δηλ. η γωνία θ παραμένει ίδια, όπερ σημαίνει ότι η σκάλα εξακολουθεί να βρίσκεται σε κατάσταση οριακής μάλιστα ισορροπίας (όπως και πριν την τοποθέτηση του βαριδίου). Η τοποθέτηση του βαριδίου στη θέση του κέντρου μάζας της σκάλας απλώς οδηγεί σε διπλασιασμό των δυνάμεων αντίδρασης εκ του τοίχου και εκ του δαπέδου, με τελικό αποτέλεσμα 'τη διατήρηση' της εξ.[12], και ως εκ τούτου 'τη διατήρηση' της εξ.[1] και μετά την τοποθέτηση του βαριδίου. Σημειώστε ότι τα παραπάνω είναι συμβατά και με τον 1ο νόμο του Νεύτωνα! Η σωστή απάντηση λοιπόν είναι το **(β)**.

4. Η κύρια παρατήρηση στο υποερώτημα αυτό είναι η εξής: Όταν εκτρέψουμε το σώμα μάζας m ελαφρώς προς τα δεξιά, εάν δεν υπήρχε το νήμα, το σώμα m διερχόμενο από τη θέση ισορροπίας του θα συμπίεζε το ελατήριο κινούμενο προς τα αριστερά … όπως γνωρίζουμε από τις αμειώτες γραμμικές αρμονικές ταλαντώσεις. Στην προκειμένη περίπτωση όμως όταν το ανωτέρω σώμα πάει να διέλθει εκ της θέσης ισορροπίας του κινούμενο προς τα αριστερά, τείνεται ακαριαία το νήμα και ασκεί μια ώθηση προς τα δεξιά ανακόπτοντας την προς τα αριστερά πορεία του σώματος. Για να το πούμε και πιο απλά, κάθε φορά που το σώμα μάζας m διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα αριστερά, δέχεται μία στιγμιαία ώθηση προς τα δεξιά από το νήμα κι αλλάζει 'επι τόπου' φορά κίνησης. Σημειώνεται ότι όλος κι όλος ο ρόλος του νήματος είναι η προαναφερθείσα άσκηση στιγμιαίας ώθησης προς τα δεξιά κατά περιόδους! Επειδή σε κάθε τέντωμα του νήματος χάνεται ενέργεια (λίγη αλλά χάνεται) ... το σώμα θα εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση με περίοδο ελαφρώς μικρότερη από την περίοδο της αμείωτης ταλάντωσης, οπότε η σωστή απάντηση είναι η **(β)**.

ΘΕΜΑ 3ο

A. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο κατά τα γνωστά είναι το βάρος του κατακόρυφα, η κάθετη αντίδραση από το κεκλιμένο επίπεδο (κάθετη στην κεκλιμένη επιφάνεια με φορά μακριά από αυτήν) και η στατική τριβή στο σημείο επαφής κυλίνδρου-κεκλιμένης επιφάνειας παράλληλα προς την κεκλιμένη επιφάνεια με φορά προς το πάνω μέρος της. Η συνισταμένη των δυνάμεων κάθετα στην κεκλιμένη επιφάνεια οδηγεί στην εξίσωση

$$Mg\cos\phi = N \qquad [14]$$

ενώ η συνισταμένη των δυνάμεων παράλληλα με την κεκλιμένη επιφάνεια οδηγεί στην εξίσωση της μεταφορικής κίνησης του ΚΜ του κυλίνδρου

$$-f_s + Mg\sin\phi = Ma \qquad [15]$$

όπου ϕ είναι η υποτιθέμενη γωνία κλίσης της κεκλιμένης επιφάνειας. Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για περιστροφή περί το ΚΜ βρίσκουμε (για κύλιση χωρίς ολίσθηση) ότι

$$rf_s = \frac{1}{2}Mr^2\alpha \Rightarrow f_s = \frac{1}{2}M\underbrace{r\alpha}_{=a} = \frac{1}{2}Ma \qquad [16]$$

Απαλοίφοντας την μεταφορική επιτάχυνση του ΚΜ μέσω των εξ. [15] και [16] βρίσκουμε

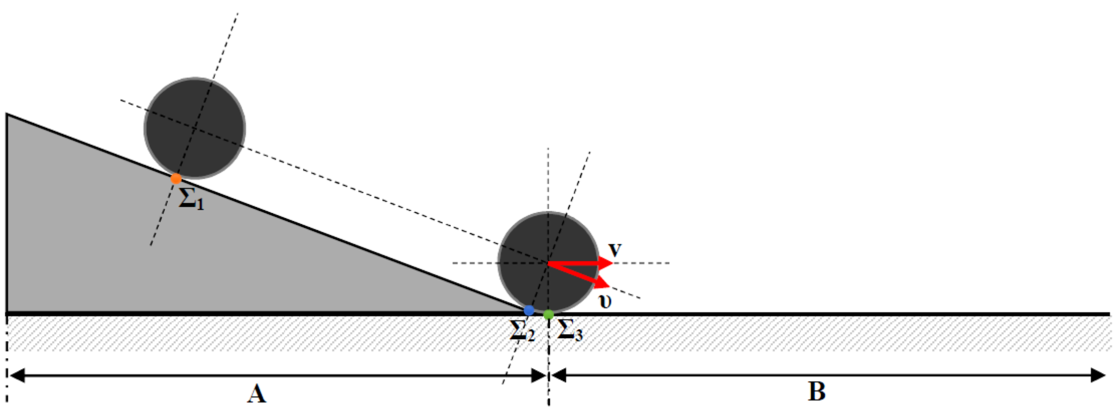
$$f_s = \frac{1}{3}Mg\sin\phi \qquad [17]$$

Ότι γράψαμε μέχρι τώρα ισχύουν για οποιαδήποτε γωνία κλίσης μικρότερη από ή ίση με τη μέγιστη δυνατή γωνία κλίσης για την οποίαν ο κύλινδρος κατέρχεται κυλιόμενος χωρίς ολίσθηση. Κάνοντας εφαρμογή της εξ. [17] για την μέγιστη δυνατή γωνία κλίσης που αναφέρεται στην εκφώνηση παίρνουμε

$$f_s^{\max} = \frac{1}{3}Mg\sin\phi \Rightarrow \mu Mg\cos\phi_{\max} = \frac{1}{3}Mg\sin\phi_{\max} \Rightarrow \tan\phi_{\max} = 3\mu \qquad [18]$$

Συνεπώς η ζητούμενη γωνία κλίσης είναι

$$\boxed{\phi = \frac{\phi_{\max}}{2} = \frac{1}{2}\arctan(3\mu) \qquad [19]}$$

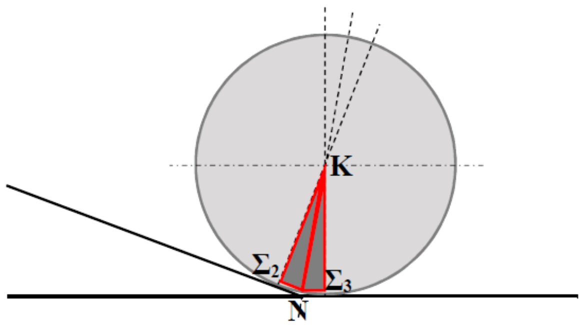


Εικόνα 1: *Κίνηση του κυλίνδρου κατά τη μετάβαση από την περιοχή Α στην Β. Η τραχιά επιφάνεια φτάνει ως το σημείο $Σ_3$ προκειμένου να ομαλοποιηθεί η μετάβαση από την περιοχή Α στην περιοχή Β.*

Η πληροφορία της εξ.[19] ισχύει για όλο το υπόλοιπο της άσκησης.

Β. Αρχικώς, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. μεταξύ της αρχικής θέσης του κυλίνδρου όπου το στιγμιαίο σημείο επαφής είναι το $Σ_1$ (εικ.1) και της θέσης του κυλίνδρου για την οποία το στιγμιαίο σημείο επαφής με την κεκλιμένη επιφάνεια είναι το $Σ_2$ (εικ.1), οπότε βρίσκουμε ότι

$$Mgh + 0 + 0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + Mgr \qquad [20]$$



Εικόνα 2: *Μεγέθυνση της μετάβασης από την περιοχή Α στην Β. Το σημείο Ν της συνένωσης κεκλιμένης και οριζόντιας επιφάνειας δεν αποτελεί ποτέ στιγμιαίο σημείο επαφής του κυλίνδρου με το δάπεδο.*

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι ($K\Sigma_2$) = ($K\Sigma_3$) = r (παραπομπή εικ.2), όπου Κ η θέση του ΚΜ του κυλίνδρου. Περαιτέρω από την εξ. [20] έχουμε ότι

$$Mgh + 0 + 0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} M \underbrace{r^2\omega^2}_{=v^2} + \frac{1}{2} Mv^2 + Mgr \Rightarrow gh + 0 + 0 = \frac{3}{4} v^2 + gr \qquad [21]$$

και τελικά

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g(h - r)} \ \ \frac{m}{s} \qquad [22]$$

Η τελευταία σχέση δίνει την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ακριβώς μόλις φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου (όπου το στιγμιαίο σημείο επαφής με το δάπεδο είναι το σημείο Σ_2 της εικόνας 1 ή 2 παραπάνω). Περαιτέρω, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης «*Οι περιοχές Α και Β συνδέονται αρκετά ομαλά η μία με την άλλη έτσι ώστε να μην παρατηρείται αναπήδηση ή γλίστρημα του κυλίνδρου κατά τη μετάβαση από την περιοχή Α στην περιοχή Β*» - συνεπώς η σύνδεση των δύο περιοχών Α και Β πρέπει να γίνει όπως δείχνεται με λεπτομέρεια στην εικόνα 2 παραπάνω (δηλ. οι δύο περιοχές θα «συνορεύουν» στη θέση Σ3 της εικ. 2). Εφόσον ισχύει κάτι τέτοιο, η έκφραση «δεν παρατηρείται αναπήδηση ή γλίστρημα του κυλίνδρου ... » υποννοεί ότι *η ταχύτητα του στιγμιαίου σημείου επαφής δεν πρέπει να εμφανίζει ασυνέχεια κατά τη μετάβαση από την περιοχή Α στην περιοχή Β*. Συνεπώς, το στιγμιαίο σημείο επαφής με το δάπεδο θα πρέπει να συνεχίσει να έχει μηδενική ταχύτητα και κατά την κίνηση του κυλίνδρου στο οριζόντιο δάπεδο (περιοχή Β). Πριν προχωρήσουμε όμως παρακάτω, πρέπει να προσέξουμε την εξής λεπτομέρεια: Την στιγμή που ο κύλινδρος συναντά το σύνορο μεταξύ των περιοχών Α και Β, ας την ονομάσουμε t_0, το στιγμιαίο σημείο επαφής στη θέση του οποίου για $t \to t_0^-$ το διάνυσμα της ταχύτητας του ΚΜ είναι ακόμη παράλληλο προς την κεκλιμένη επιφάνεια με φορά προς τη βάση της, ενώ για $t \to t_0^+$ το διάνυσμα της ταχύτητας του ΚΜ γίνεται παράλληλο προς την οριζόντια επιφάνεια της περιοχής Β, είναι το σημείο Σ3 (παραπομπή στην εικ.1) και όχι το σημείο $Σ_2$. Η προσέγγιση που κάνουμε είναι λοιπόν η εξής: *Δεχόμαστε ότι λαμβάνει χώρα μία ακαριαία (κατά τη στιγμή t_0) αλλαγή της φοράς του διανύσματος της ταχύτητας του ΚΜ του κυλίνδρου, όταν το σημείο επαφής με το δάπεδο είναι το σημείο Σ3*. Εφόσον δεν υπάρχει αναπήδηση ή γλίστρημα, η στροφορμή διατηρείται ως προς το στιγμιαίο σημείο επαφής Σ3, οπότε θα ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
&L_{\alpha\rho\chi}^{\Sigma_3} = L_{\tau\varepsilon\lambda}^{\Sigma_3} \Leftrightarrow \mathrm{I}\,\omega(t_0^-)\Big|_{CM} + Mv_{CM}(t_0^-)r\Big|_{\Sigma_3} = \mathrm{I}\,\omega(t_0^+)\Big|_{CM} + Mv_{CM}(t_0^+)r\Big|_{\Sigma_3} \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{2}Mr^2\frac{v}{r} + Mv\cos\phi r = \mathrm{I}\,\omega(t_0^+)\Big|_{CM} + Mv_{CM}(t_0^+)r\Big|_{\Sigma_3} \Leftrightarrow \\
&Mvr\left(\frac{1}{2} + \cos\phi\right) = \mathrm{I}\,\omega(t_0^+)\Big|_{CM} + Mv_{CM}(t_0^+)r\Big|_{\Sigma_3}
\end{aligned}
\qquad [23]
$$

όπου η ταχύτητα v παραπάνω δίνεται από την εξ.[22]. Περαιτέρω, η απαίτηση η ταχύτητα του στιγμιαίου σημείου επαφής του κυλίνδρου να μην εμφανίζει ασυνέχεια κατά τη μετάβαση από την περιοχή Α στην περιοχή Β οδηγεί στην συνθήκη ότι

$$
V \equiv v_{CM}(t_0^+) = \omega(t_0^+)r \qquad [24]
$$

Συνδυάζοντας τις εξ.[23] και [24] βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&Mvr\left(\frac{1}{2} + \cos\phi\right) = \mathrm{I}\,\omega(t_0^+)\Big|_{CM} + Mv_{CM}(t_0^+)r\Big|_{\Sigma_3} \Leftrightarrow \\
&Mvr\left(\frac{1}{2} + \cos\phi\right) = \frac{1}{2}Mr^2\frac{V}{r} + MVr \Leftrightarrow Mvr\left(\frac{1}{2} + \cos\phi\right) = \frac{3}{2}MVr
\end{aligned}
\qquad [25]
$$

και τελικώς ότι (χρησιμοποιώντας τις εξ.[19] και [22])

$$
\boxed{V = \frac{2}{3}v\left(\frac{1}{2} + \cos\phi\right) = \sqrt{\frac{4}{3}g(h-r)}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)\right)\ \frac{m}{s} \qquad [26]}
$$

Η τελευταία σχέση δίνει την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν περιέρχεται στην οριζόντια περιοχή Β. Κλείνοντας με το υποερώτημα αυτό σημειώνονται τα ακόλουθα:

(α) η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ελαττώθηκε κατά το πέρασμα από την περιοχή Α στην περιοχή Β (για να το δείτε μπορείτε απλά να συγκρίνετε τις εξ.[22] και [26]), και

(β) κατά το πέρασμα από την περιοχή Α στην περιοχή Β ο κύλινδρος εξακολουθεί να κυλίεται χωρίς ολίσθηση *λόγω του κλειδώματος* των ταχυτήτων στο σημείο επαφής που επιβάλλει η συνθήκη της εξ.[24] ... και που 'προκάλεσε' η παρουσία της στατικής τριβής νωρίτερα.

Γ. Επειδή δεν υπάρχει τριβή στις περιοχές Β και Γ, και οι όποιες δυνάμεις δέχεται ο κύλινδρος διέρχονται από το ΚΜ του, η περιστροφική του κατάσταση δεν αλλάζει κατά την κίνηση στις περιοχές Β και Γ (αφού δεν δημιουργείται καμία ροπή περί το ΚΜ). Συνεπώς, όταν ο κύλινδρος αρχίζει να ανέρχεται στο τεταρτοκύκλιο, αυτό γίνεται «εις βάρος» της μεταφορικής κινητικής ενέργειάς του και μόνον. Μία περαιτέρω συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι η όποια συσχέτιση ταχυτήτων υπήρχε κατά την μετάβαση από την περιοχή Α στην περιοχή Β, καταστρέφεται πλήρως κατά το πέρασμα από την περιοχή Β στην περιοχή Γ, για τον απλούστατο λόγο του ότι δεν υπάρχει κανένας παράγοντας που να συμπλέκει την μεταφορική με την περιστροφική κίνηση εντός της περιοχής Γ. Επομένως, παύει να υφίσταται η 'κληροδοτούμενη' κύλιση χωρίς ολίσθηση της περιοχής Β κατά το πέρασμα στην περιοχή Γ. ... εάν δεν έγινε ακόμη αντιληπτό, ας αναφερθεί ρητά τότε ότι όλος αυτός ο πρόλογος έγινε για να μην χρησιμοποιήσετε την γνωστή σχέση $\Delta s = r \cdot \Delta\theta$ εντός της περιοχής Γ ... μπορείτε παρόλα αυτά να την χρησιμοποιήσετε στις περιοχές Α και Β (αν κατάλαβατε το σημείο αυτό απαντήστε γιατί!).

Ας εφαρμόσουμε στη συνέχεια την Α.Δ.Ε. μεταξύ της θέσης εισόδου του κυλίνδρου στην τεταρτοκύκλια επιφάνεια (ας την ονομάσουμε Σ_4) και της θέσης όπου σταματάει στιγμιαία την ανερχόμενη κίνησή του επί της τεταρτοκύκλιας επιφάνειας (ας την ονομάσουμε Σ_5), θα είναι τότε:

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2(t_0^+) + Mgr = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2(t_0^+) + Mgz \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + Mgr = Mgz \Rightarrow z = \frac{1}{2g}V^2 + r \qquad [27]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ως στάθμη αναφοράς της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας την οριζόντια επιφάνεια Β. Έστω περαιτέρω ότι το κυκλικό τόξο $\overset{\frown}{\Sigma_4\Sigma_5} \equiv \Delta s_\Gamma$ βαίνει σε επίκεντρη γωνία θ, με κέντρο το κέντρο του τεταρτοκυκλίου. Τότε θα ισχύει ότι

$$R\cos\theta = R - z \Rightarrow \cos\theta = \frac{R-z}{R} = 1 - \frac{z}{R} \Rightarrow \theta = \arccos\left(1 - \frac{z}{R}\right) \qquad [28]$$

και ως εκ τούτου, θα ισχύει ότι

$$\Delta s_\Gamma = R\theta = R\arccos\left(1 - \frac{z}{R}\right) = R\arccos\left[1 - \frac{1}{R}\left(\frac{V^2}{2g} + r\right)\right] \qquad [29]$$

Επειδή η περιστροφική κίνηση είναι ανεξάρτητη της μεταφορικής κίνησης στην περιοχή Γ, εάν ο κύλινδρος διετέλεσε *N* περιστροφές επί του τεταρτοκυκλίου καθ' όλη την ανοδική κίνησή του σε αυτό, τότε στο ίδιο χρονικό διάστημα περιστράφηκε κατά

$$N = \frac{\Delta\theta_\Gamma}{2\pi} \Rightarrow \Delta\theta_\Gamma = 2\pi N \qquad [30]$$

κι εφόσον δεν εμφανίζεται καμία ροπή κατά την κίνηση στο τεταρτοκύκλιο, η ανωτέρω περιστροφή διεξήχθη ομαλά, ήτοι

$$\Delta\theta_{\Gamma} = \omega(t_0^+)\Delta t_{\Gamma} \xrightarrow{[24]} \Delta\theta_{\Gamma} = \frac{V}{r}\Delta t_{\Gamma} \xrightarrow{[30]} \Delta t_{\Gamma} = \frac{2\pi N r}{V} \xrightarrow{[26]}$$

$$\Delta t_{\Gamma} = \frac{2\pi N r}{v\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\phi\right)} = \frac{2\pi N r}{\sqrt{\frac{4}{3}g(h-r)}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\phi\right)} = \frac{2\pi N r}{\sqrt{\frac{4}{3}g(h-r)}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)\right]} \qquad [31]$$

όπου αντικαταστήσαμε κατά σειρά προηγούμενα αποτελέσματα ... ώστε να εκφράσουμε την απάντηση συναρτήσει δεδομένων μεγεθών της άσκησης και μόνον.

Ας περάσουμε τώρα στην περιοχή Α. Αν το σημείο Σ_1 της εικόνας 1 (πιο πάνω) βρίσκεται σε ύψος x από την οριζόντια επιφάνεια Β τότε εύκολα βρίσκεται ότι

$$x = (\Sigma_1\Sigma_2)\sin\phi \qquad [32]$$

Περαιτέρω, είναι εύκολο να βρει κανείς με λίγο τριγωνομετρία ότι

$$h = r\cos\phi + x = r\cos\phi + (\Sigma_1\Sigma_2)\sin\phi \Rightarrow (\Sigma_1\Sigma_2) = \frac{h - r\cos\phi}{\sin\phi} \qquad [33]$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να βρούμε την συνολική απόσταση που διήνυσε ο κύλινδρος από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερος μέχρι και τη στιγμή που σταματάει στιγμιαία την ανοδική κίνησή του στο τεταρτοκύκλιο. Η εν λόγω απόσταση προκύπτει ως

$$\Delta s = (\Sigma_1\Sigma_2) + \Delta s_B + \Delta s_{\Gamma} \xrightarrow{[29],[33]} \frac{h - r\cos\phi}{\sin\phi} + \Delta s_B + R\arccos\left[1 - \frac{1}{R}\left(\frac{V^2}{2g}+r\right)\right] =$$

$$\ldots = \frac{h - r\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)} + R + R\arccos\left[1 - \frac{2}{3}\frac{h-r}{R}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)\right)^2 - \frac{r}{R}\right] \quad (m) \qquad [34]$$

Θα πρέπει στη συνέχεια να βρούμε σε πόσο χρόνο κατέβηκε ο κύλινδρος την κεκλιμένη επιφάνεια (περιοχή Α) το μήκος της οποίας δίνεται από την εξ.[33]. Εκ των εξ.[15], [17] και [19] βρίσκουμε εύκολα ότι

$$a = \frac{2}{3}Mg\sin\phi = const. \qquad [35]$$

Εφόσον η μεταφορική κίνηση επί της περιοχής Α είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, εκ των εξ.[22] και [35] βρίσκουμε ότι

$$v = a\Delta t_A \Rightarrow \Delta t_A = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}g(h-r)}}{\frac{2}{3}Mg\sin\phi} = \frac{\sqrt{3g(h-r)}}{Mg\sin\phi} = \frac{\sqrt{3}}{M\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)}\sqrt{\frac{h-r}{g}}$$

[36]

Η τελευταία εξίσωση δίνει τον χρόνο που μεσολαβεί μέχρι ο κύλινδρος να φτάσει στη βάση της κεκλιμένης επιφάνειας, κατά την οποία στιγμή, το στιγμιαίο σημείο επαφής είναι το σημείο Σ_2 της εικόνας 1 παραπάνω.

Κατά την μετάβαση από την κεκλιμένη επιφάνεια Α στην περιοχή Β, κατά την οποία περνάμε από το στιγμιαίο σημείο επαφής Σ_2 στο στιγμιαίο σημείο επαφής Σ_3, ο κύλινδρος δεν δέχεται καμία ροπή αφού είναι στιγμιαία στον αέρα ... όμως η ασυνέχεια του σημείου επαφής γίνεται πρακτικά ακαριαία και ως εκ τούτου ο χρόνος της ανωτέρω μετάβασης θεωρείται αμελητέος ... .

Περαιτέρω, ο κύλινδρος διατρέχει την περιοχή Β κυλιόμενος χωρίς ολίσθηση (σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε λεπτομερώς στο προηγούμενο υποερώτημα αλλά και στην αρχή του υποερωτήματος αυτού) και την καλύπτει σε χρόνο

$$\Delta t_B = \frac{\Delta s_B}{V} = \frac{R}{v\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\phi\right)} \xrightarrow{[19],[22]} \Delta t_B = \frac{R}{\sqrt{\frac{4}{3}g(h-r)}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)\right]}$$

[37]

Ο ζητούμενος συνολικός χρόνος μετάβασης βρίσκεται εκ των εξ.[31], [36] και [37] ως:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta t = \Delta t_{\mathrm{A}} + \Delta t_{\mathrm{B}} + \Delta t_{\Gamma} = {} & \frac{\sqrt{3}}{M\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)}\sqrt{\frac{h-r}{g}} + \\ & \frac{R}{\sqrt{\frac{4}{3}g(h-r)}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)\right]} + \frac{2\pi N r}{\sqrt{\frac{4}{3}g(h-r)}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(3\mu)\right)\right]} \quad (\mathrm{sec})\end{aligned}}$$

[38]

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Το δεδομένο ότι κατά την στρωτή ροή οι πίδακες εκ των οπών Α και Β της δεξαμενής συναντιούνται στο κέντρο του σωλήνα ΡΣ πρέπει να αξιοποιηθεί με τον σωστότερο δυνατό τρόπο. Μία συνέπεια της ανωτέρω πληροφορίας είναι εξής: Η εμβέλεια των πιδάκων είναι ίση προς s, δηλαδή όση είναι η απόσταση του κέντρου του σωλήνα ΡΣ από το δεξιό τοίχωμα της δεξαμενής. Περαιτέρω ισχύει (μιας και τα μόρια του νερού κατά την έξοδό τους από την μία οπή ή την άλλη συμμετέχουν σε οριζόντια βολή) ότι

$$s = v_{out}^{\mathrm{A}} \Delta t_{\mathrm{A}}, \;\; s = v_{out}^{\mathrm{B}} \Delta t_{\mathrm{B}} \qquad [39]$$

καθώς και ότι

$$y_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2} g \left(\Delta t_{\mathrm{A}} \right)^2, \;\; y_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2} g \left(\Delta t_{\mathrm{B}} \right)^2 \qquad [40]$$

όπου τα ύψη $y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}}$ μετρώνται από τον πυθμένα της δεξαμενής. Οι εξισώσεις [39] και [40] δίνουν ότι

$$y_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2} g \left(\frac{s}{v_{out}^{\mathrm{B}}} \right)^2, \;\; y_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2} g \left(\frac{s}{v_{out}^{\mathrm{A}}} \right)^2 \qquad [41]$$

Περαιτέρω, εκ του νόμου του Toricelli, που εν προκειμένω ισχύει εν' όψη της δοθείσης συνθήκης ότι r << R/100 (<< R), συνάγεται ότι

$$v_{out}^{\mathrm{A}} = \sqrt{2g(H - y_{\mathrm{A}})}, \;\; v_{out}^{\mathrm{B}} = \sqrt{2g(H - y_{\mathrm{B}})} \qquad [42]$$

όπου H είναι το άγνωστο ύψος της στήλης του νερού στη δεξαμενή κατά την στρωτή ροή που πρέπει να υπολογίσουμε. Συνδυάζοντας τις εξ.[41] και [42] βρίσκουμε ότι

$$\begin{gathered} y_B = \frac{1}{2} g \frac{s^2}{2g(H - y_{\mathrm{B}})}, \;\; y_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2} g \frac{s^2}{2g(H - y_{\mathrm{A}})} \Rightarrow \\ y_B = \frac{1}{4} \frac{s^2}{(H - y_{\mathrm{B}})}, \;\; y_{\mathrm{A}} = \frac{1}{4} \frac{s^2}{(H - y_{\mathrm{A}})} \end{gathered} \qquad [43]$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι

$$y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}} = 2s \qquad [44]$$

Συνεπώς πρέπει να λύσουμε το σύστημα των εξ.[43] και [44] ως προς το H. Είναι λοιπόν:

$$y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}} = \frac{1}{4} \frac{s^2}{(H - y_{\mathrm{A}})} - \frac{1}{4} \frac{s^2}{(H - y_{\mathrm{B}})} \Rightarrow 2s = \frac{1}{4} \frac{s^2}{(H - y_{\mathrm{A}})} - \frac{1}{4} \frac{s^2}{(H - y_{\mathrm{B}})} \Rightarrow$$

$$\frac{8}{s} = \frac{1}{H - y_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{H - y_{\mathrm{B}}} \Rightarrow \frac{8}{s} = \frac{\left(H - y_{\mathrm{B}}\right) - \left(H - y_{\mathrm{A}}\right)}{\left(H - y_{\mathrm{B}}\right)\left(H - y_{\mathrm{A}}\right)} \Rightarrow \frac{H - y_{\mathrm{B}} - H + y_{\mathrm{A}}}{\left(H - y_{\mathrm{B}}\right)\left(H - y_{\mathrm{A}}\right)} = \frac{8}{s}$$

και περαιτέρω

$$\frac{-y_{\rm B}+y_{\rm A}}{\left(H-y_{\rm B}\right)\left(H-y_{\rm A}\right)}=\frac{8}{s}\Rightarrow\frac{2s}{\left(H-y_{\rm B}\right)\left(H-y_{\rm A}\right)}=\frac{8}{s}\Rightarrow\frac{s}{\left(H-y_{\rm B}\right)\left(H-y_{\rm A}\right)}=\frac{4}{s}\Rightarrow$$

$$\left(H-y_{\rm B}\right)\left(H-y_{\rm A}\right)=\frac{s^2}{4}\Rightarrow H^2-\left(y_{\rm A}+y_B\right)H+y_Ay_B-\frac{s^2}{4}=0 \qquad [45]$$

Υπάρχει άλλη μία σχέση που δεν έχουμε εξαγάγει ... εκ των εξ. [39], [40] και [42] έχουμε ότι

$$\left\{s=v_{out}^{\rm A}\Delta t_{\rm A},\ \ s=v_{out}^{\rm B}\Delta t_{\rm B}\right\}\Rightarrow v_{out}^{\rm A}\Delta t_{\rm A}=v_{out}^{\rm B}\Delta t_{\rm B}\Rightarrow\frac{v_{out}^{\rm A}}{v_{out}^{\rm B}}=\frac{\Delta t_{\rm B}}{\Delta t_{\rm A}}\xrightarrow{[40]}$$

$$\frac{v_{out}^{\rm A}}{v_{out}^{\rm B}}=\frac{\sqrt{2y_{\rm B}/g}}{\sqrt{2y_{\rm A}/g}}=\sqrt{\frac{y_{\rm B}}{y_{\rm A}}}\xrightarrow{[42]}\frac{\sqrt{2g(H-y_{\rm A})}}{\sqrt{2g(H-y_{\rm B})}}=\sqrt{\frac{y_{\rm B}}{y_{\rm A}}}\Rightarrow\sqrt{\frac{H-y_{\rm A}}{H-y_{\rm B}}}=\sqrt{\frac{y_{\rm B}}{y_{\rm A}}}\Rightarrow$$

$$\frac{H-y_{\rm A}}{H-y_{\rm B}}=\frac{y_{\rm B}}{y_{\rm A}}\Rightarrow Hy_{\rm A}-y_{\rm A}^2=Hy_{\rm B}-y_{\rm B}^2\Rightarrow H\left(y_{\rm A}-y_{\rm B}\right)=y_{\rm A}^2-y_{\rm B}^2\xrightarrow{y_{\rm A}\neq y_{\rm B}}H=y_{\rm A}+y_{\rm B} \qquad [46]$$

Εκ των εξ.[45] και [46] προκύπτει ότι

$$H^2-\left(y_{\rm A}+y_B\right)H+y_Ay_B-\frac{s^2}{4}=0\xrightarrow{[46]}H^2-H^2+y_Ay_B-\frac{s^2}{4}=0\Rightarrow$$

$$y_Ay_B=\frac{s^2}{4} \qquad [47]$$

Περαιτέρω, εκ των εξ.[44] και [46] έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l}H=y_{\rm A}+y_{\rm B}\Rightarrow H^2=y_{\rm A}^2+2y_{\rm A}y_{\rm B}+y_{\rm B}^2\\ y_{\rm A}-y_{\rm B}=2s\Rightarrow\left(y_{\rm A}-y_{\rm B}\right)^2=4s^2\Rightarrow 4s^2=y_{\rm A}^2-2y_{\rm A}y_{\rm B}+y_{\rm B}^2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$H^2-4s^2=y_{\rm A}^2+2y_{\rm A}y_{\rm B}+y_{\rm B}^2-\left(y_{\rm A}^2-2y_{\rm A}y_{\rm B}+y_{\rm B}^2\right)\Rightarrow$$

$$H^2-4s^2=y_{\rm A}^2+2y_{\rm A}y_{\rm B}+y_{\rm B}^2-y_{\rm A}^2+2y_{\rm A}y_{\rm B}-y_{\rm B}^2\Rightarrow \qquad [48]$$

$$H^2-4s^2=2y_{\rm A}y_{\rm B}+2y_{\rm A}y_{\rm B}\Rightarrow H^2-4s^2=4y_{\rm A}y_{\rm B}\xrightarrow{[47]}H^2-4s^2=4\frac{s^2}{4}\Rightarrow$$

$$H^2-4s^2=s^2\Rightarrow H^2=5s^2$$

και τελικά

$$H = s\sqrt{5} \quad (m) \qquad [49]$$

Η τελευταία σχέση υποδεικνύει ότι το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας Ε του νερού στην δεξαμενή παραμένει σταθερό, αφού η απόσταση s (δηλαδή η εμβέλεια των πιδάκων) είναι σταθερή. Σημειώστε επίσης ότι σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, η οπή Α απέχει από την ελεύθερη επιφάνεια Ε ακριβώς όσο απέχει η οπή Β από τον πυθμένα της δεξαμενής.

Β. Στο ερώτημα αυτό ζητείται να απαντήσουμε στο εξής: *Πόσο θα πρέπει να μεταβληθεί η τρέχουσα σταθερή παροχή ώστε ο σωλήνας ΡΣ να μπορεί να γεμίζει, είτε αφήνοντας μόνο την πάνω, είτε μόνο την κάτω οπή ανοιχτή;* Θα χρειαστεί να διερευνήσουμε και τις δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: Έστω ότι αφήνουμε μόνο την κάτω οπή Β ανοιχτή. Για να μπορεί να γεμίσει ο σωλήνας ΡΣ θα πρέπει η εμβέλεια του πίδακα που εξέρχεται από την οπή Β να είναι ίση προς s. Εκ των εξ.[39] και [40] έχουμε λοιπόν ότι (χρησιμοποιούμε τις εν λόγω εξισώσεις επειδή η εμβέλεια ζητείται να παραμείνει αμετάβλητη κι επίσης το ύψος της οπής Β από τον πυθμένα της δεξαμενής δεν αλλάζει):

$$\left.\begin{aligned} s &= v'^{\mathrm{B}}_{out}\Delta t_{\mathrm{B}} \\ y_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{2}g\left(\Delta t_{\mathrm{B}}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s = v'^{\mathrm{B}}_{out}\sqrt{\frac{2y_{\mathrm{B}}}{g}} \qquad [50]$$

... και θα πρέπει να βρούμε το y_{B}. Αυτό θα γίνει μέσω την εξ. [44], [46] και [49] οι οποίες δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}} &= 2s \\ y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}} &= H \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y_{\mathrm{B}} = H - 2s \Rightarrow y_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}H - s \xrightarrow{[49]} y_{\mathrm{B}} = \frac{s\sqrt{5}}{2} - s \qquad [51]$$

Επομένως, η ταχύτητα εκροής του νερού από την οπή Β θα πρέπει να δίνεται από την κάτωθι σχέση

$$v'^{\mathrm{B}}_{out} = \frac{s}{\sqrt{\frac{2y_{\mathrm{B}}}{g}}} = \frac{s}{\sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{s\sqrt{5}}{2} - s\right)}} = \frac{s}{\sqrt{\frac{1}{g}s\left(\sqrt{5}-2\right)}} = \sqrt{\frac{s^2}{\frac{1}{g}s\left(\sqrt{5}-2\right)}} = \sqrt{\frac{sg}{\sqrt{5}-2}} = \sqrt{sg\left(\sqrt{5}+2\right)} \qquad [52]$$

Ο όγκος νερού που χάνεται ανά μονάδα χρόνου από την οπή Β είναι ίσος προς

$$\Pi' = \pi r^2 v'^{\mathrm{B}}_{out} = \pi r^2 \sqrt{sg\left(\sqrt{5}+2\right)} \qquad [53]$$

Δεν μπορούμε όμως ακόμη να βρούμε τη συσχέτιση του παραπάνω αποτελέσματος με την δοθείσα παροχή Π ... πρέπει να βρούμε την παροχή Π με άλλα λόγια και κατόπιν να γίνει η ζητούμενη συσχέτιση. Αυτό που σίγουρα ισχύει είναι ότι οι θέσεις των οπών Α και Β είναι αμετάβλητες άπαξ και υπολογίστηκαν ... οπότε περνάμε να βρούμε τώρα το y_{A}. Εκ των εξ.[44] και [51] βρίσκουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}} &= 2s \\ y_{\mathrm{B}} &= \frac{s\sqrt{5}}{2} - s \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{\mathrm{A}} = \frac{s\sqrt{5}}{2} - s + 2s = \frac{s\sqrt{5}}{2} + s \qquad [54]$$

Μπορούμε κατόπιν να συνδυάσουμε τις εξ.[42], [49], [51] και [54] απ' όπου παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} v^{\mathrm{A}}_{out} &= \sqrt{2g(H - y_{\mathrm{A}})} \xrightarrow{[46]} v^{\mathrm{A}}_{out} = \sqrt{2gy_{\mathrm{B}}} = \sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} \\ v^{\mathrm{B}}_{out} &= \sqrt{2g(H - y_{\mathrm{B}})} \xrightarrow{[46]} v^{\mathrm{B}}_{out} = \sqrt{2gy_{\mathrm{A}}} = \sqrt{2g\left(\frac{s\sqrt{5}}{2}+s\right)} = \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)} \end{aligned} \qquad [55]$$

Επομένως και με τις δύο οπές ανοιχτές ο όγκος νερού που χάνεται ανά μονάδα χρόνου είναι ίσος με

$$\Pi = \pi r^2 v^{\mathrm{A}}_{out} + \pi r^2 v^{\mathrm{B}}_{out} = \pi r^2 \left(\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)}\right) \qquad [56]$$

και τόση ακριβώς πρέπει να είναι η σταθερή παροχή όταν αμφότερες οι οπές είναι ανοιχτές ώστε να μπορεί να διατηρείται η ελεύθερη επιφάνεια Ε του νερού στο ύψος από τον πυθμένα που υπολογίστηκε στην εξ.[49].

Συγκρίνοντας τις εξ.[53] και [56] διαπιστώνουμε ότι

$$\Pi - \Pi' = \pi r^2 \left(\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)}\right) - \pi r^2 \sqrt{sg\left(\sqrt{5}+2\right)} = \pi r^2 \sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} > 0 \qquad [57]$$

πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει να *μειώσουμε* την αρχική παροχή Π κατά την ποσότητα

$$\boxed{\Delta\Pi = \pi r^2 \sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} \quad \left(\frac{m^3}{s}\right) \qquad [58]}$$

Περίπτωση 2η: Έστω ότι αφήνουμε μόνο την πάνω οπή Α ανοιχτή. Για να μπορεί να γεμίσει ο σωλήνας ΡΣ θα πρέπει η εμβέλεια του πίδακα που εξέρχεται από την οπή Α να είναι ίση προς s και πάλι. Εκ των εξ.[39] και [40] έχουμε λοιπόν ότι (χρησιμοποιούμε τις εν λόγω εξισώσεις επειδή η εμβέλεια ζητείται να παραμείνει αμετάβλητη κι επίσης το ύψος της οπής Α από τον πυθμένα της δεξαμενής δεν αλλάζει):

$$\left.\begin{aligned} s &= v'^{\mathrm{A}}_{out}\Delta t_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{A}} &= \frac{1}{2}g\left(\Delta t_{\mathrm{A}}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s = v'^{\mathrm{A}}_{out}\sqrt{\frac{2y_{\mathrm{A}}}{g}} \xrightarrow{[54]} v'^{\mathrm{A}}_{out} = \frac{s}{\sqrt{\dfrac{2y_{\mathrm{A}}}{g}}} = \frac{s}{\sqrt{\dfrac{2}{g}\left(\dfrac{s\sqrt{5}}{2}+s\right)}} \Rightarrow$$

$$v'^{\mathrm{A}}_{out} = \frac{s}{\sqrt{\dfrac{s}{g}\left(\sqrt{5}+2\right)}} = \sqrt{\frac{sg}{\sqrt{5}+2}} = \sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)} \qquad [59]$$

Ο όγκος νερού που χάνεται ανά μονάδα χρόνου από την οπή Α είναι ίσος προς

$$\Pi'' = \pi r^2 v'^{\mathrm{A}}_{out} = \pi r^2\sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)} \qquad [60]$$

Εκ των εξ.[56] και [60] κατόπιν βρίσκουμε ότι

$$\Pi - \Pi'' = \pi r^2\left(\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)}\right) - \pi r^2\sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)} = \pi r^2\sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)} > 0 \qquad [61]$$

πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει να *μειώσουμε* και πάλι την αρχική παροχή Π κατά την ποσότητα

$$\boxed{\Delta\Pi' = \pi r^2\sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)} \quad \left(\frac{m^3}{s}\right)} \qquad [62]$$

Στον παραπάνω υπολογισμό αγνοήθηκε η έκταση της διατομής του σωλήνα ΡΣ, αφού ζητήσαμε η εμβέλεια να έχει συγκεκριμένη τιμή, κι όχι να κυμαίνεται σε κάποιο εύρος τιμών, που θα ήταν πιο σωστό μεν, αλλά, αν η διατομή του σωλήνα είναι πολύ μικρή σε σχέση με την εμβέλεια του οιουδήποτε πίδακα ... η ανωτέρω προσέγγιση είναι αποδεκτή.

Έξτρα εξάσκηση: *Ξαναλύστε το παραπάνω υποερώτημα αν ταυτόχρονα με το κλείσιμο της μίας εκ των οπών της δεξαμενής, συγχρόνως μετατοπίζαμε τον σωλήνα ΡΣ σε απόσταση 2s από την δεξαμενή, αντί της αρχικής απόστασης s. Αν βρείτε λάθος αποτελέσματα θα πρέπει να ξανακοιτάξετε την πορεία λύσης του παραπάνω ερωτήματος η οποία δεν ακολουθήθηκε τυχαία ... .*

Γ. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό πρέπει κάθε υποπερίπτωση να την σπάσουμε σε δύο φάσεις. Κατά την πρώτη φάση ο σωλήνας γεμίζει μέχρι το μισό του χωρίς να υπάρξει απώλεια νερού από τον πυθμένα του, ενώ κατά την δεύτερη φάση ο σωλήνας συνεχίζει να γεμίζει μέχρι να *υπερχειλίσει* με ταυτόχρονη όμως απώλεια νερού από τον πυθμένα του. Αυτό που αλλάζει μεταξύ των δύο υποπεριπτώσεων (α) και (β) της εκφώνησης είναι η σταθερή παροχή της δεξαμενής στην όλη διαδικασία.

<u>Περίπτωση (α): Και οι δύο οπές της δεξαμενής είναι αρχικώς ανοιχτές</u>

Βρήκαμε προηγούμενα ότι και με τις δύο οπές της δεξαμενής σε λειτουργία, η παροχή από την δεξαμενή προς τον σωλήνα ΡΣ είναι ίση προς (παραπομπή στην εξ. [56])

$$\Pi = \pi r^2 \left(\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)} \right) \qquad [63]$$

αφού ο όποιος όγκος νερού ανά μονάδα χρόνου χάνεται από την δεξαμενή καταλήγει στον σωλήνα ΡΣ (οπότε η απώλεια νερού της δεξαμενής συνιστά παροχή του αυτού νερού στον σωλήνα ΡΣ). Ως εκ τούτου λοιπόν ο μισός σωλήνας ΡΣ γεμίζει σε χρόνο

$$\frac{\pi(10r)^2 \frac{L}{2}}{\Delta t_1} = \Pi \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\pi(10r)^2 \frac{L}{2}}{\Pi} = \frac{50L}{\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)}} \qquad [64]$$

Όταν ανοιχτεί η οπή στον πυθμένα του σωλήνα, θεωρώντας ακαριαία αποκατάσταση νέας στρωτής ροής, ο σωλήνας γεμίζει *ελαφρώς βραδύτερα* απ' ότι πριν, επειδή έχουμε ταυτόχρονη απώλεια νερού από τον πυθμένα. Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή μετά το άνοιγμα της οπής στον πυθμένα του σωλήνα, ο όγκος του νερού στον σωλήνα είναι ίσος προς $V = \pi(10r)^2 h$, όπου h είναι το στιγμιαίο ύψος της στήλης του νερού στον σωλήνα ΡΣ, μετρούμενο από τον πυθμένα του. Μέσα σε χρονικό διάστημα dt έχουμε ότι

$$dV = 100\pi r^2 dh = \underbrace{\Pi}_{const.} dt - \Pi_{out} dt \qquad [65]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο όγκος του νερού στον σωλήνα αυξήθηκε εντός του χρονικού διαστήματος dt λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι από τη μία ο σωλήνας γεμίζει λόγω της δεξαμενής υπό σταθερή παροχή, κι από την άλλη αδειάζει λόγω της οπής στον πυθμένα. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον ρυθμό απωλειών Π_{out} όμως, κι αυτό θα γίνει με την εξής διαδικασία: Αν κάποια χρονική στιγμή το ύψος της στήλης του νερού στον σωλήνα είναι h τότε από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στον σωλήνα και του σημείου εκροής στον πυθμένα του σωλήνα βρίσκουμε ότι

$$P_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v'^2 \Rightarrow 2gh + v^2 = v'^2 \qquad [66]$$

όπου h είναι το στιγμιαίο ύψος της στήλης του νερού στον σωλήνα ΡΣ, μετρούμενο από τον πυθμένα του (όπως προείπαμε). Όμως ισχύουν επιπλέον τα εξής:

$$\Pi_{out} = \pi r^2 v' \xrightarrow{[66]} \Pi_{out} = \pi r^2 \sqrt{2gh + v^2} \qquad [67]$$

κι επίσης ότι

$$v = dh / dt \qquad [68]$$

Συνδυάζοντας τις εξ.[65] ως [68] βρίσκουμε ότι

$$100\pi r^2 \frac{dh}{dt} = \Pi - \Pi_{out} \Rightarrow 100\pi r^2 v = \Pi - \pi r^2 \sqrt{2gh + v^2} \Rightarrow$$

$$\pi r^2 \sqrt{2gh + v^2} = \Pi - 100\pi r^2 v \Rightarrow \sqrt{2gh + v^2} = \frac{\Pi}{\pi r^2} - 100v \xrightarrow[\text{both sides}]{\text{square}}$$

$$2gh + v^2 = \left(\frac{\Pi}{\pi r^2}\right)^2 + 10^4 v^2 - 200\frac{\Pi}{\pi r^2} v \Rightarrow 10^4 v^2 - 200\frac{\Pi}{\pi r^2} v + \left(\frac{\Pi}{\pi r^2}\right)^2 - 2gh \approx 0$$

[69]

Καταλήξαμε επομένως σε ένα τριώνυμο ως προς την μεταβλητή v. Περαιτέρω είναι

$$10^4 v^2 - 200\frac{\Pi}{\pi r^2} v + \left(\frac{\Pi}{\pi r^2}\right)^2 - 2gh \approx 0 \Rightarrow \ldots \textit{ solve the trinomial } \ldots \Rightarrow$$

$$v \approx \frac{200\frac{\Pi}{\pi r^2} \pm \sqrt{\left(200\frac{\Pi}{\pi r^2}\right)^2 - 4\cdot 10^4 \cdot \left[\left(\frac{\Pi}{\pi r^2}\right)^2 - 2gh\right]}}{2\cdot 10^4} = \frac{200\frac{\Pi}{\pi r^2} \pm \sqrt{4\cdot 10^4 \left(\frac{\Pi}{\pi r^2}\right)^2 - 4\cdot 10^4 \cdot \left(\frac{\Pi}{\pi r^2}\right)^2 + 8\cdot 10^4 \cdot gh}}{2\cdot 10^4} \Rightarrow$$

$$v \approx \frac{200\frac{\Pi}{\pi r^2} \pm \sqrt{8\cdot 10^4 \cdot gh}}{2\cdot 10^4} = \frac{200\frac{\Pi}{\pi r^2} \pm 200\sqrt{2gh}}{2\cdot 10^4} = \frac{200\frac{\Pi}{\pi r^2} \pm 200\sqrt{2gh}}{200\cdot 100} = \frac{1}{100}\left(\frac{\Pi}{\pi r^2} \pm \sqrt{2gh}\right)$$

[70]

Στη συνέχεια εκ των εξ.[63] και [70] βρίσκουμε ότι

$$v \approx \frac{1}{100}\left(\frac{\Pi}{\pi r^2} \pm \sqrt{2gh}\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{\pi r^2\left(\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)}\right)}{\pi r^2} \pm \sqrt{2gh}\right) =$$

$$\frac{1}{100}\left(\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)} \pm \sqrt{2gh}\right) = \underbrace{\frac{1}{100}\left(\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)}\right)}_{\equiv C_1 > 0} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{2g}}{100}}_{\equiv C_2 > 0}\sqrt{h}$$

[71]

Μπορούμε τέλος να συνδυάσουμε τις εξ.[68] και [71], απ' όπου παίρνουμε ότι

$$\frac{dh}{dt} = C_1 \pm C_2\sqrt{h} \Rightarrow \frac{dh}{C_1 \pm C_2\sqrt{h}} = dt \Rightarrow \Delta t_2 = \int_{L/2}^{L} \frac{dh}{C_1 \pm C_2\sqrt{h}} \qquad [72]$$

Θα υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα για κάθε πρόσημο ξεχωριστά στη συνέχεια. Το ολοκλήρωμα είναι τετριμμένο ... όπως θα δείτε και μόνοι σας στην πορεία ...

$$\Delta t_2 = \int_{L/2}^{L} \frac{dh}{C_1 \pm C_2\sqrt{h}} \xrightarrow[dz=dh/2\sqrt{h}=dh/2z]{z=\sqrt{h}} \Delta t_2 = \int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{2zdz}{C_1 \pm C_2 z} = \frac{2}{C_2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{C_2 z}{C_1 \pm C_2 z}dz = \frac{2}{C_2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{C_2 z + C_1 - C_1}{C_1 \pm C_2 z}dz \Rightarrow$$

$$\Delta t_2^+ = \frac{2}{C_2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{C_2 z + C_1 - C_1}{C_1 + C_2 z}dz = \frac{2}{C_2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{C_2 z + C_1}{C_1 + C_2 z}dz - \frac{2C_1}{C_2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{1}{C_1 + C_2 z}dz = \frac{2}{C_2}\left\{\sqrt{L} - \sqrt{\frac{L}{2}}\right\} - \frac{2C_1}{C_2^2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{C_2}{C_1 + C_2 z}dz$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2C_1}{C_2^2}\ln\left[\frac{C_1 + C_2\sqrt{L}}{C_1 + C_2\sqrt{\frac{L}{2}}}\right]$$

$$\Delta t_2^- = \frac{2}{C_2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{C_2 z + C_1 - C_1}{C_1 - C_2 z}dz = \frac{2}{C_2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{C_2 z - C_1}{C_1 - C_2 z}dz + \frac{2}{C_2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{C_1}{C_1 - C_2 z}dz = -\frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2C_1}{C_2^2}\int_{\sqrt{L/2}}^{\sqrt{L}} \frac{(-C_2)}{C_1 - C_2 z}dz =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2C_1}{C_2^2}\ln\left|\frac{C_1 - C_2\sqrt{L}}{C_1 - C_2\sqrt{\frac{L}{2}}}\right| < 0$$

[73]

Βρίσκουμε επομένως ότι

$$\Delta t_2^+ \approx \frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2C_1}{C_2^2}\ln\left[\frac{C_1 + C_2\sqrt{L}}{C_1 + C_2\sqrt{\frac{L}{2}}}\right] \qquad [74]$$

και περαιτέρω δεδομένου ότι

$$C_1 = \frac{1}{100}\left(\sqrt{gs\left(\sqrt{5}-2\right)} + \sqrt{gs\left(\sqrt{5}+2\right)}\right) \approx \frac{\sqrt{gs}}{100}\left(\sqrt{\sqrt{5}-2} + \sqrt{\sqrt{5}+2}\right) \approx \frac{5}{2}\frac{\sqrt{gs}}{100} = \frac{\sqrt{gs}}{40},\ C_2 = \frac{\sqrt{2g}}{100}$$

$$C_1 / C_2 \approx \frac{\frac{\sqrt{gs}}{40}}{\frac{\sqrt{2g}}{100}} \approx \frac{\sqrt{gs}}{40}\frac{100}{\sqrt{2g}} \approx \frac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{s}$$

εκ της εξ.[74] βρίσκουμε ότι

$$\Delta t_2^+ \approx \frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2C_1}{C_2^2}\ln\left[\frac{\dfrac{C_1}{C_2}+\sqrt{L}}{\dfrac{C_1}{C_2}+\sqrt{\dfrac{L}{2}}}\right] \approx \frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2}{C_2}\frac{C_1}{C_2}\ln\left[\frac{\dfrac{C_1}{C_2}+\sqrt{L}}{\dfrac{C_1}{C_2}+\sqrt{\dfrac{L}{2}}}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2}{C_2}\frac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{s}\ln\left[\frac{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{s}+\sqrt{L}}{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{s}+\sqrt{\dfrac{L}{2}}}\right] = 100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[\frac{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\right]\right\} =$$

$$100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[\frac{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\right]\right\} = 100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+1}\right]\right\}$$

[75]

Κανονικά θα πρέπει να διασφαλιστεί ρητώς ότι $\Delta t_2^+ > 0$ ... παρακάμπτουμε όμως τη συγκεκριμένη μαθηματική απόδειξη ... μπορείτε αντ' αυτού να χρησιμοποιήσετε ένα software και να ζωγραφίσετε την αδιάστατη ποσότητα μέσα στις αγκύλες στην τελική απάντηση της εξ.[75] και να διαβεβαιωθείτε ότι είναι θετικά ορισμένη, οπότε η παραπάνω απάντηση έχει το σωστό πρόσημο!

Επομένως, ο σωλήνας ΡΣ υπερχειλίζει ύστερα από χρόνο ίσο προς

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2^+ = \frac{1}{\sqrt{gs}}\frac{50L}{\underbrace{\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}}_{\approx 5/2}} + 100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+1}\right]\right\} \approx \\ &20\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{L}{s}} + 100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+1}\right]\right\} \approx 20\sqrt{\frac{L}{g}}\left[\sqrt{\frac{L}{s}}+5\left\{\sqrt{2}-1-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{s}{L}}+1}\right]\right\}\right] \\ &\hfill [76]\end{aligned}}$$

Περίπτωση (β): Η οπή Α είναι μόνο ανοιχτή αρχικώς

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι ακριβώς ίδια με εκείνη που ακολουθήθηκε στην περίπτωση (α) παραπάνω, με μόνη διαφορά την σταθερή παροχή της δεξαμενής η οποία αλλάζει όταν είναι ανοιχτή μόνο η οπή Α απ' όπου εξέρχεται πίδακας ο οποίος θέλουμε να γεμίζει τον σωλήνα ΡΣ. Οπότε ξεκινάμε με την εξ.[60], και ως εκ τούτου ο μισός σωλήνας γεμίζει σε χρόνο ίσο προς

$$\frac{\pi(10r)^2\,\frac{L}{2}}{\Delta t_3} = \Pi'' \xrightarrow{[60]} \Delta t_3 = \frac{\pi(10r)^2\,\frac{L}{2}}{\Pi''} = \frac{50\pi r^2 L}{\pi r^2\sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)}} = \frac{50L}{\sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)}} \quad [77]$$

Για την δεύτερη φάση γεμίσματος κατά την οποίαν συμμετέχει και η οπή στον πυθμένα του σωλήνα ΡΣ ... δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε όλη την προηγούμενη ανάλυση ... διότι η μόνη διαφοροποίηση είναι στην σταθερή παροχή της δεξαμενής ... η οποία αν παρατηρήσετε προσεκτικά, τελικώς επηρεάζει μόνο την σταθερή C_1. Δηλαδή είναι

$$C_1''=\frac{1}{100}\left(\frac{\Pi''}{\pi r^2}\right)=\frac{1}{100}\left(\frac{\pi r^2\sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)}}{\pi r^2}\right)=\frac{1}{100}\sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)},\;\; C_2=\frac{\sqrt{2g}}{100}$$

$$C_1''/\,C_2=\frac{\frac{1}{100}\sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)}}{\frac{\sqrt{2g}}{100}}=\frac{\sqrt{s\left(\sqrt{5}-2\right)}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\sqrt{s}$$

[78]

Επομένως, μπορούμε αμέσως να πάμε στο αποτέλεσμα της εξ.[74] και να το χρησιμοποιήσουμε ως έχει, αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση $C_1 \to C_1''$, όπου το C_1'' ορίστηκε στην εξ.[78]. Είναι λοιπόν:

$$\Delta t_4^+ \approx \frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L}-\frac{2C_1''}{C_2^2}\ln\left[\frac{C_1''+C_2\sqrt{L}}{C_1''+C_2\sqrt{\frac{L}{2}}}\right]=\frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L}-\frac{2}{C_2}\frac{C_1''}{C_2}\ln\left[\frac{\frac{C_1''}{C_2}+\sqrt{L}}{\frac{C_1''}{C_2}+\sqrt{\frac{L}{2}}}\right]=$$

$$100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\sqrt{\frac{s}{L}}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\sqrt{\frac{s}{L}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]\right\}=$$

$$100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}+1}\right]\right\}$$

[79]

Επομένως, ο σωλήνας υπερχειλίζει ύστερα από χρόνο ίσο προς

$$\Delta t'' = \Delta t_3 + \Delta t_4^+ = \frac{50L}{\sqrt{sg\left(\sqrt{5}-2\right)}} + 100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}+1}\right]\right\} =$$

$$\frac{50}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{\frac{L}{s}}\sqrt{\frac{L}{g}} + 100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}+1}\right]\right\} =$$

$$50\sqrt{\frac{L}{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}\sqrt{\frac{L}{s}} + 2\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\frac{s}{L}}+1}\right]\right\}\right] \quad [80]$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι εξ.[77] και [79].

Περίπτωση (β): Η οπή Β είναι μόνο ανοιχτή αρχικώς

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι ακριβώς ίδια με εκείνη που ακολουθήθηκε στην περίπτωση (α) παραπάνω, με μόνη διαφορά την σταθερή παροχή της δεξαμενής η οποία αλλάζει όταν είναι ανοιχτή μόνο η οπή Β απ' όπου εξέρχεται πίδακας ο οποίος θέλουμε να γεμίζει τον σωλήνα ΡΣ. Οπότε ξεκινάμε με την εξ.[53], και ως εκ τούτου ο μισός σωλήνας γεμίζει σε χρόνο ίσο προς

$$\frac{\pi(10r)^2\,\frac{L}{2}}{\Delta t_5} = \Pi' \Rightarrow \Delta t_5 = \frac{\pi(10r)^2\,\frac{L}{2}}{\Pi'} = \frac{50L}{\sqrt{sg\left(\sqrt{5}+2\right)}} \quad [81]$$

Και πάλι, για την δεύτερη φάση γεμίσματος κατά την οποίαν συμμετέχει και η οπή στον πυθμένα του σωλήνα ΡΣ ... δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε όλη την ανάλυση της περίπτωσης (α) ... διότι η μόνη διαφοροποίηση είναι στην σταθερή παροχή της δεξαμενής ... η οποία αν παρατηρήσετε προσεκτικά, τελικώς επηρεάζει μόνο την σταθερή C_1. Δηλαδή είναι

$$C_1' = \frac{1}{100}\left(\frac{\Pi'}{\pi r^2}\right) = \frac{1}{100}\sqrt{sg\left(\sqrt{5}+2\right)},\ \ C_2 = \frac{\sqrt{2g}}{100}$$

$$C_1' / C_2 = \frac{\frac{1}{100}\sqrt{sg\left(\sqrt{5}+2\right)}}{\frac{\sqrt{2g}}{100}} = \frac{\sqrt{s\left(\sqrt{5}+2\right)}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\sqrt{s} \quad [82]$$

Επομένως, μπορούμε αμέσως να πάμε στο αποτέλεσμα της εξ.[74] και να το χρησιμοποιήσουμε ως έχει, αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση $C_1 \to C_1'$, όπου το C_1' ορίστηκε στην εξ.[82]. Είναι λοιπόν:

$$\Delta t_6^+ \approx \frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2C_1'}{C_2^2}\ln\left[\frac{C_1' + C_2\sqrt{L}}{C_1' + C_2\sqrt{\frac{L}{2}}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{C_2}\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{L} - \frac{2}{C_2}\frac{C_1'}{C_2}\ln\left[\frac{\frac{C_1'}{C_2}+\sqrt{L}}{\frac{C_1'}{C_2}+\sqrt{\frac{L}{2}}}\right] =$$

$$100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\frac{s}{L}}+1}\right]\right\}$$

[83]

Τελικώς, ο σωλήνας υπερχειλίζει ύστερα από χρόνο ίσο προς

$$\boxed{\begin{aligned}
&\Delta t' = \Delta t_5 + \Delta t_6^+ = \frac{50L}{\sqrt{sg\left(\sqrt{5}+2\right)}} + 100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\frac{s}{L}}+1}\right]\right\} = \\
&\frac{50}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{L}{s}} + 100\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\frac{s}{L}}+1}\right]\right\} = \\
&50\sqrt{\frac{L}{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}\sqrt{\frac{L}{s}} + 2\left\{\sqrt{2}-1-\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\frac{s}{L}}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt{\frac{s}{L}}+1}\right]\right\}\right] \\
&\hspace{30em}[84]
\end{aligned}}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι εξ.[81] και [83].

Τέλος, στις εξ.[76], [80] και [84] οι χρόνοι μετρώνται σε sec.

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ