

Παρατηρήσεις στη μεταπτωτική κίνηση ενός στρεφόμενου τροχού

Η ανάρτηση αυτή έγινε με αφορμή:

1) Την πολύ καλή και ενδιαφέρουσα ανάρτηση του συναδέλφου Νίκου Σταματόπουλου με τίτλο «Μεταπτωτική κίνηση τροχού στον ... αέρα» (ΕΔΩ).

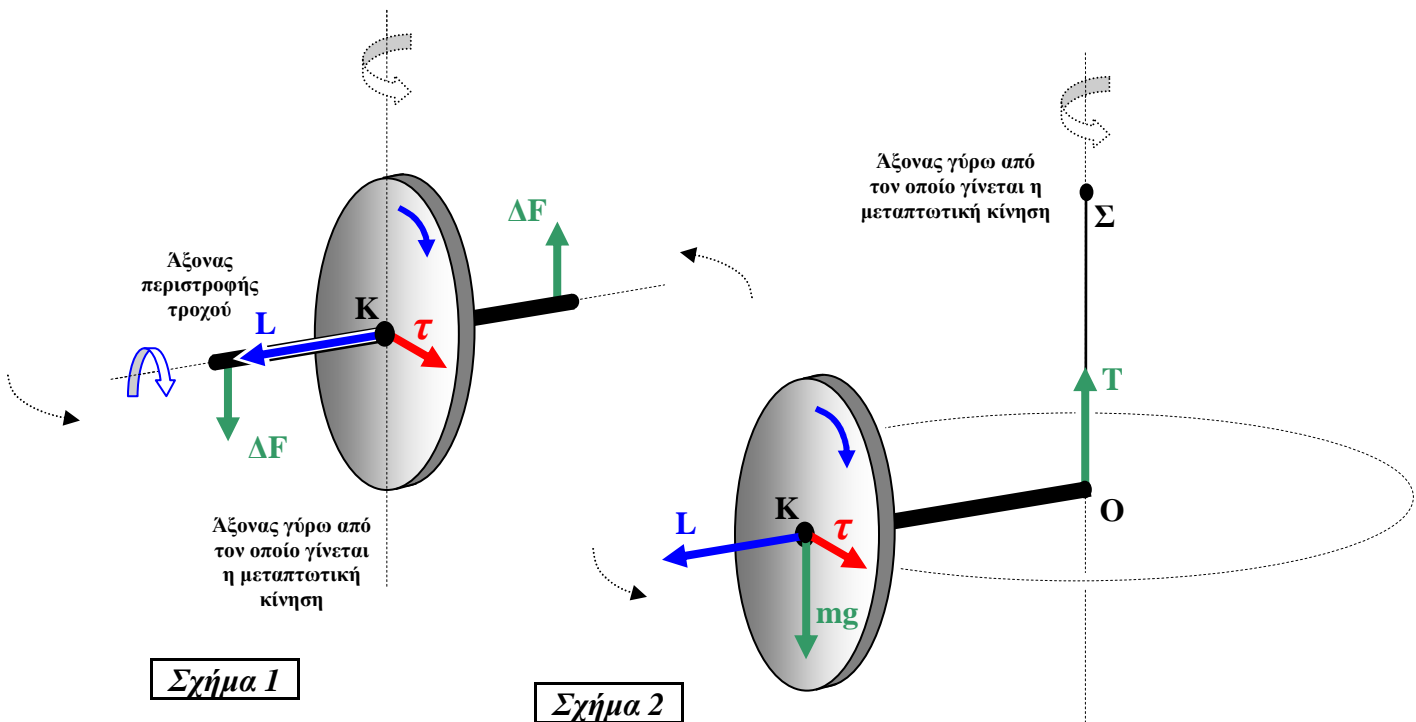
2) Δύο παλαιότερες αναρτήσεις μου, από τις οποίες

η μία παραπέμπει απλώς σε μία από αυτές τις όμορφες διαλέξεις του καθηγητή Walter Lewin από το MIT με θέμα τη στροφορμή, τη διατήρησή της και τις μεταπτωτικές κινήσεις (ΕΔΩ),

και η άλλη ασχολείται με την «Αλλαγή προσανατολισμού του άξονα περιστροφής ενός τροχού» (ΕΔΩ).

Το κοινό θέμα ήταν η συμπεριφορά ενός στρεφόμενου τροχού, αν ασκηθεί κάθετα στον άξονά του ένα ζεύγος δυνάμεων.

Ας υποθέσουμε ότι ο τροχός *στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο*, ώστε ο άξονάς του να είναι *οριζόντιος* και κάθετος στο εν λόγω επίπεδο (Σχήματα 1 και 2).



Στο **Σχήμα 1** κρατάμε τον στρεφόμενο τροχό με τα χέρια μας εξουδετερώνοντας το βάρος του. Κάποια στιγμή μεταβάλλουμε τις δύο δυνάμεις των χεριών μας κατά ΔF ώστε να δημιουργήσουμε ένα *κατακόρυφο ζεύγος δυνάμεων*. Η ροπή του ζεύγους αυτού έχει μέτρο τ και είναι οριζόντια και κάθετη στον άξονα.

Στο **Σχήμα 2** κρεμάμε τον στρεφόμενο τροχό, μέσω κατακόρυφου νήματος στερεωμένου στο σημείο **Σ**, από την άκρη **Ο** του άξονα. Η τάση **T** τώρα του νήματος μαζί με το βάρος **mg** του τροχού δημιουργούν το κατακόρυφο ζεύγος δυνάμεων, εξαιτίας του οποίου αναπτύσσεται πάλι στον τροχό, όπως και πριν, η ροπή **τ**.

Και στις δύο περιπτώσεις, η ροπή του ασκούμενου ζεύγους δυνάμεων (αντί όπως ίσως θα περίμενε κανείς, να στρέψει τον άξονα του τροχού πάνω στο επίπεδο του ζεύγους και αντίθετα από τη φορά του ρολογιού) **αναγκάζει τον άξονα του τροχού να αρχίσει να στρέφεται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο** και συγκεκριμένα **στο επίπεδο που ορίζεται από τη στροφορμή \vec{L} του τροχού και τη ροπή $\vec{\tau}$ του ζεύγους**.

Όπως αναφέρει και ο Walter Lewin **η στροφορμή \vec{L} του τροχού φαίνεται να «καταδιώκει» τη ροπή ζεύγους $\vec{\tau}$** , που στρέφεται και αυτή ώστε να παραμένει κάθετη στον άξονα. Ο άξονας του τροχού στρέφεται έτσι διαρκώς πάνω στο οριζόντιο αυτό επίπεδο και τα δύο διανύσματα, παραμένουν συνεχώς κάθετα μεταξύ τους. Η **μετάπτωση** αυτή του τροχού, **η περιστροφή του δηλαδή γύρω από ένα νέο κατακόρυφο άξονα** γίνεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\text{μετ.}}$, η οποία μάλιστα παραμένει σταθερή, αν η ασκούμενη ροπή ζεύγους έχει σταθερό μέτρο **τ**.

Πράγματι, όπως αποδείχτηκε και στις αναρτήσεις που αναφέρθηκαν στην αρχή, ξεκινώντας από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση:

$$\boxed{\omega_{\text{μετ.}} = \frac{\tau}{L}} \quad \text{ή αλλιώς} \quad \boxed{\omega_{\text{μετ.}} = \frac{\tau}{I \cdot \omega}}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η γωνιακή ταχύτητα της μετάπτωσης είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού: **Όσο πιο γρήγορα στρέφεται ο τροχός τόσο πιο αργά γίνεται η μετάπτωση**.

Το **1^ο ΘΕΜΑ** που αξίζει να σχολιάσουμε στο σημείο αυτό, είναι το εξής:

Το φαινόμενο αυτό της μετάπτωσης του τροχού συμβαίνει στην πραγματικότητα έτσι όπως το περιγράψαμε μόνο όταν ισχύει: $\omega_{\text{μετ.}} \ll \omega$.

Η συνθήκη αυτή αναφέρεται στη βιβλιογραφία, τονίζεται και από τον Walter Lewin στη διάλεξή του, αλλά και στην πράξη αν προσπαθήσουμε να κάνουμε το πείραμα με ένα τροχό που δεν περιστρέφεται αρκετά γρήγορα (δηλ. σχετικά μικρή ω) τότε η μετάπτωση είναι γρήγορη και άστατη. Στην περίπτωση του **Σχήματος 2**, θα διαπιστώσουμε ότι ο άξονας του τροχού «πέφτει» γρήγορα τείνοντας να γίνει κατακόρυφος, ενώ στην περίπτωση του **Σχήματος 1** κινείται ακανόνιστα και κινδυνεύει να μας φύγει από τα χέρια.

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια ποιοτική ερμηνεία στο γιατί πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $\omega_{\text{μετ.}} \ll \omega$ αν θέλουμε να έχουμε μια ομαλή μεταπτωτική κίνηση:

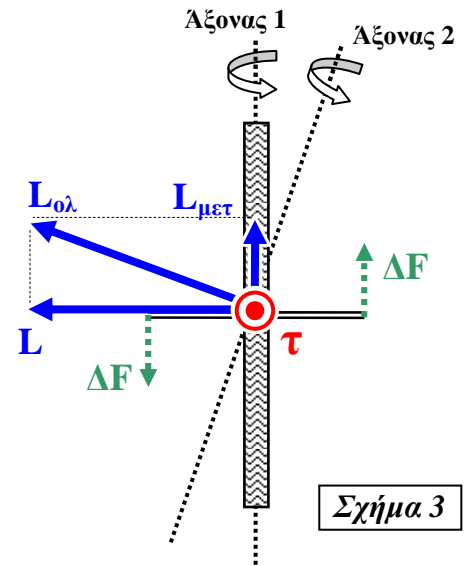
Στο διπλανό **Σχήμα 3** φαίνεται μια διαφορετική προοπτική του τροχού του **Σχήματος 1**.

Από το νόμο του Νεύτωνα $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ φαίνεται ότι

$d\vec{L} = \vec{\tau} \cdot dt$. Δηλαδή το γινόμενο $\vec{\tau} \cdot dt$ (ώθηση ροπής) εκφράζει τη στροφορμή $d\vec{L}$ που μεταφέρεται σε χρόνο dt στον τροχό.

Αν τώρα ισχύει $\omega_{\text{μετ.}} \ll \omega$ τότε μπορούμε χωρίς σφάλμα να θεωρήσουμε ασήμαντη τη στροφορμή $\vec{L}_{\text{μετ.}}$ του τροχού λόγω της μετάπτωσής του. Έτσι η συνολική στροφορμή του είναι η οριζόντια \vec{L} λόγω της περιστροφής του. Επειδή η μεταβολή $d\vec{L} = \vec{\tau} \cdot dt$ είναι κι αυτή οριζόντια και κάθετη στην \vec{L} , τελικά η μετάπτωση γίνεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα 1.

Αν όμως δεν ικανοποιείται η συνθήκη $\omega_{\text{μετ.}} \ll \omega$ τότε δεν μπορεί να αγνοηθεί η στροφορμή $\vec{L}_{\text{μετ.}}$ και η μετάπτωση γίνεται γύρω από άλλο στιγμιαίο άξονα 2, κάθετο στα διανύσματα $\vec{L}_{\text{ολ.}}$ και $\vec{\tau}$. Αυτός ο νέος άξονας όμως δεν έχει σταθερό προσανατολισμό, με αποτέλεσμα να μην έχουμε πλέον ομαλή μετάπτωση αλλά την ακανόνιστη κίνηση ή το «πέσιμο» του τροχού.



Το επόμενο θέμα σχετίζεται με την περίπτωση του **Σχήματος 2**, όπου έχουμε εξαρτήσει μόνο το ένα άκρο **O** του άξονα του στρεφόμενου τροχού στο κάτω άκρο του κατακόρυφου νήματος.

Στην περίπτωση αυτή, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2**, η μετάπτωση του τροχού γίνεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από εκείνο το σημείο στήριξης που είναι αναγκασμένο να παραμείνει ακίνητο και όχι γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας **K** του τροχού.

Στην περίπτωση αυτή το κέντρο μάζας του τροχού κινείται μεταφορικά διαγράφοντας κυκλική τροχιά. Είναι επομένως απαραίτητο να εμφανιστεί κάποια ακτινική δύναμη που να κατευθύνεται προς το κέντρο της τροχιάς, ώστε να παίζει το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου δύναμης.

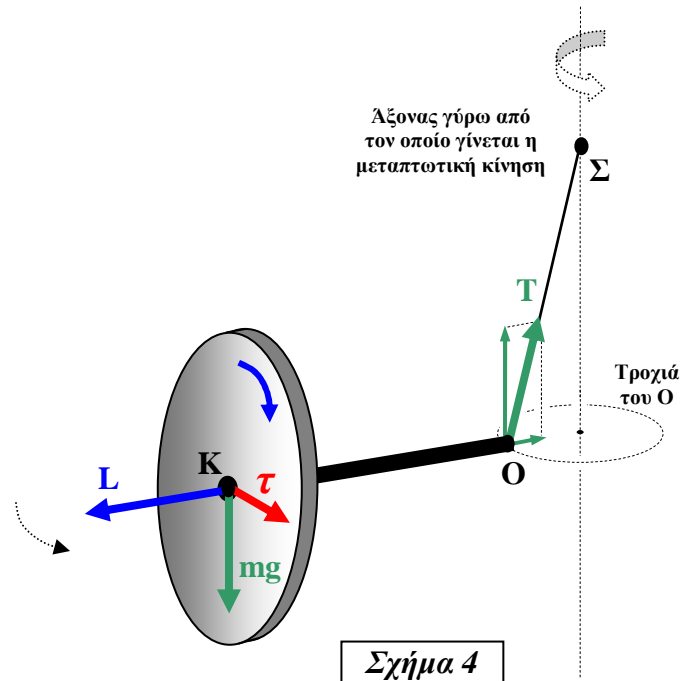
(A) Αν είχαμε στηρίξει το άκρο **O** σε μια ακλόνητη άρθρωση (που να επιτρέπει βέβαια την περιστροφή περί το **O**), τότε η αντίδραση της άρθρωσης θα μπορούσε να εμφανίσει την απαραίτητη ακτινική συνιστώσα.

(B) Το κατακόρυφο νήμα όμως δεν μπορεί να κάνει κάτι τέτοιο.

Στην περίπτωση αυτή, όπως πολύ σωστά παρατηρεί ο συνάδελφος Νίκος και αναλύει διεξοδικά στην ανάρτησή του, ο τροχός με την αδράνειά του **αναγκάζει το νήμα να πάρει κλίση**.

Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 4**, η τάση του νήματος δίνει τώρα ακτινική συνιστώσα, η οποία παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

Ο κατακόρυφος άξονας της μεταπτωτικής κίνησης διέρχεται τώρα από το επάνω σημείο πρόσδεσης Σ του νήματος και το νήμα διαγράφει μια κωνική επιφάνεια που ο άξονάς της συμπίπτει με τον άξονα μετάπτωσης.



Σχήμα 4

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις όμως (A) και (B), τίθεται το ερώτημα:

Ποια δύναμη ανάγκασε το κέντρο μάζας του τροχού να κινείται μεταφορικά;

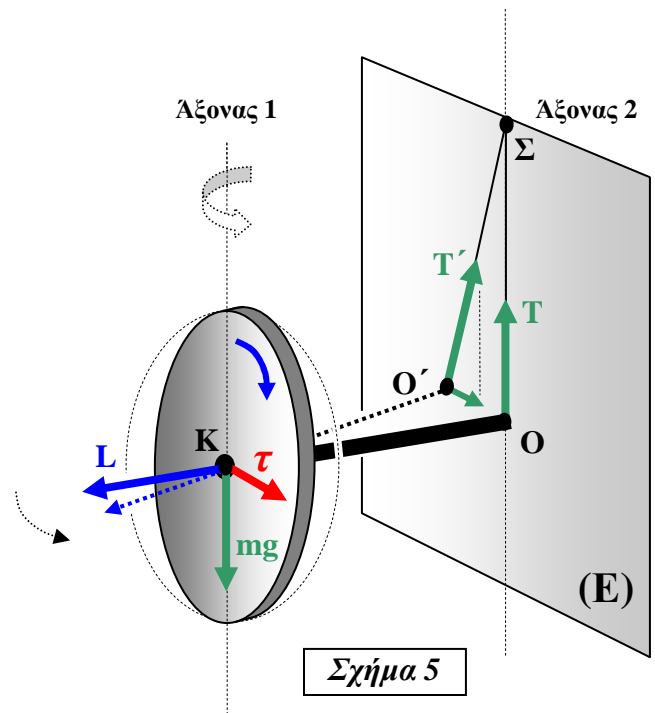
Αυτό ακριβώς είναι το **2^ο ΘΕΜΑ** στο οποίο θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια ποιοτική ερμηνεία.

Ας δούμε πρώτα την περίπτωση (B) με το νήμα.

Μόλις κρεμάσουμε τον στρεφόμενο τροχό στο κατακόρυφο νήμα (σημείο O), η τάση T του νήματος μαζί με το βάρος mg του τροχού δημιουργούν όπως είπαμε ένα ζεύγος δυνάμεων, η ροπή τ του οποίου είναι ελεύθερο διάνυσμα.

Ο τροχός λοιπόν θα προσπαθήσει κατ' αρχήν να κάνει μετάπτωση γύρω από άξονα ελάχιστης ροπής αδράνειας, άξονα δηλαδή που να περνάει από το κέντρο μάζας του τροχού (Αξονας **1** όπως και στην περίπτωση του **Σχήματος 1**).

Το κρεμασμένο άκρο O θα μετατοπιστεί τότε προς στιγμήν στη θέση O' όπως φαίνεται στο διπλανό **Σχήμα 5**, πάνω στο



Σχήμα 5

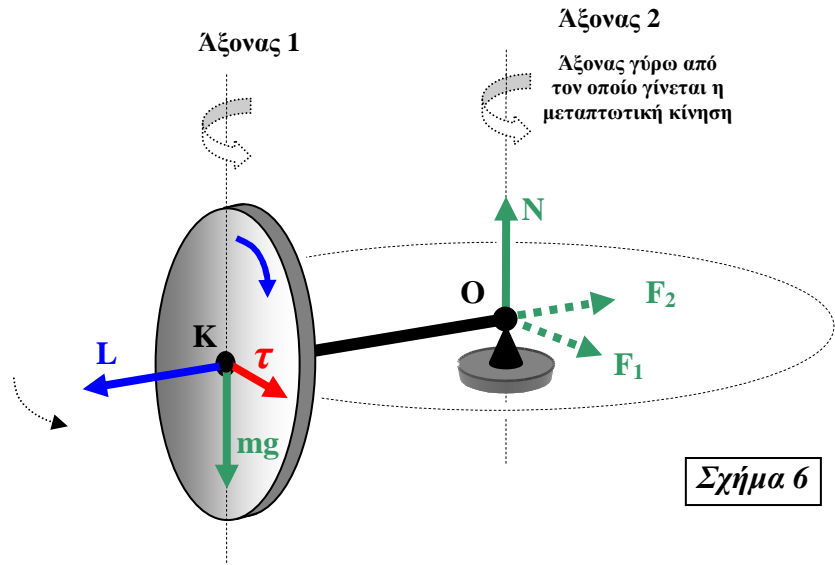
επίπεδο (**E**) που είναι κάθετο στον άξονα του τροχού.

Έτσι, η τάση **T** του νήματος θα αποκτήσει *οριζόντια συνιστώσα κάθετη αρχικά στον άξονα του τροχού*. Η συνιστώσα αυτή είναι που θα προσδώσει μεταφορική ταχύτητα στο κέντρο μάζας, για να περάσουμε στη συνέχεια στην τελική κατάσταση του **Σχήματος 4** και το κέντρο μάζας να διαγράφει την κυκλική του τροχιά.

Τι γίνεται όμως στην (**A**) περίπτωση που το άκρο **O** είναι στερεωμένο σε μια ακλόνητη άρθρωση;

Ο τροχός θα προσπαθήσει πάλι με την επίδραση του ζεύγους των δυνάμεων **N** και **mg** να κάνει αρχικά μετάπτωση γύρω από άξονα ελάχιστης ροπής αδράνειας, που να περνάει από το κέντρο μάζας (Άξονας **1**).

Αυτό θα προκαλέσει την αντίδραση της άρθρωσης με μία συνιστώσα **F₁** οριζόντια και κάθετη στην άξονα του τροχού, η οποία θα προκαλέσει όπως και πριν τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας. Σταδιακά η συνιστώσα αυτή θα στραφεί ακτινικά (**F₂**) ώστε να παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το φαινόμενο αυτό κατά τη διάρκεια του οποίου αναπτύσσεται η δύναμη **F₁** από την άρθρωση είναι μία περίπτωση «*ήπιας κρούσης*» μεταξύ του άκρου μιας στρεφόμενης ράβδου με ένα ακίνητο σώμα πολύ μεγάλης μάζας.

(Στην περιπτώσή μας του άκρου **O** του άξονα με την ακλόνητη άρθρωση – μπορείτε να δείτε αν σας ενδιαφέρει και την επόμενη ανάρτησή μου με θέμα: «Ελαστική κρούση στρεφόμενης ράβδου με ακίνητο σώμα»).