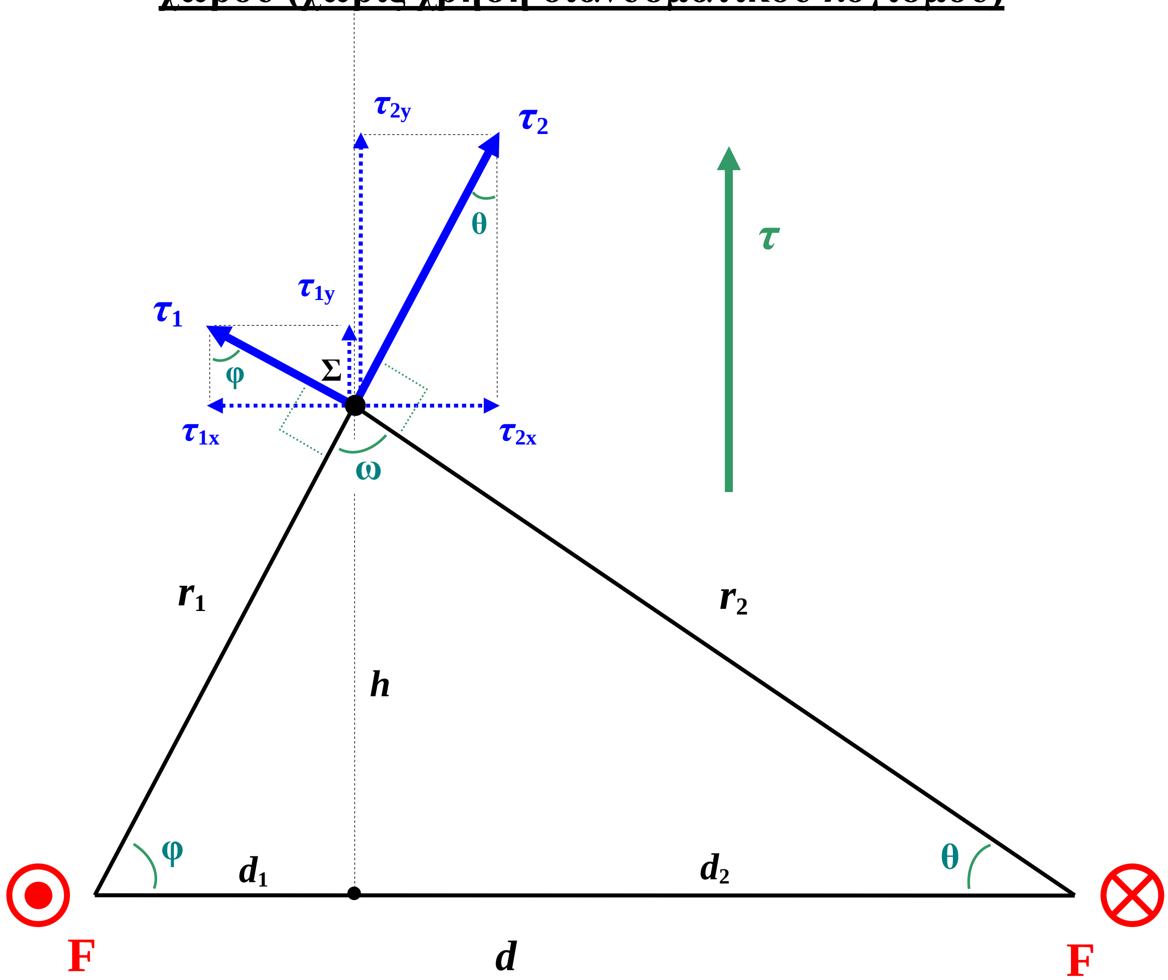
Υπολογισμός της ροπής ζεύγους σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου (χωρίς χρήση διανυσματικού λογισμού)



Το σημείο **Σ** είναι ένα τυχαίο σημείο του χώρου. Θεωρούμε το επίπεδο που διέρχεται από το **Σ** και είναι κάθετο στους παράλληλους φορείς των δυνάμεων που αποτελούν το ζεύγος (επίπεδο της σελίδας).

$1^{ος}$ τρόπος

Οι ροπές $\boldsymbol{\tau_1}$ και $\boldsymbol{\tau_2}$ των δύο δυνάμεων βρίσκονται πάνω σ' αυτό το επίπεδο (βλέπε σχήμα) και έχουν μέτρα:

$\boldsymbol{\tau_1 = F \cdot r_1}$ και $\boldsymbol{\tau_2 = F \cdot r_2}$

Με ανάλυση σε άξονα παράλληλο (**x**) και κάθετο (**y**) προς το επίπεδο των δύο δυνάμεων (κάθετο προς τη σελίδα), έχουμε:

Άξονας **x**:

$\boldsymbol{\tau_{1x} = \tau_1 \cdot ημφ = F \cdot r_1 \cdot ημφ}$ και $\boldsymbol{\tau_{2x} = \tau_2 \cdot ημθ = F \cdot r_2 \cdot ημθ}$

Όμως: $\frac{\eta\mu\varphi}{r_2} = \frac{\eta\mu\theta}{r_1} = \frac{\eta\mu\omega}{d}$ οπότε:

$\boldsymbol{\tau_{1x}} = \mathbf{F \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \eta\mu\omega / d}$ και $\boldsymbol{\tau_{2x}} = \mathbf{F \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot \eta\mu\omega / d}$ άρα $\boldsymbol{\Sigma\tau_x} = \mathbf{0}$

<u>Άξονας</u> **y**:

$\boldsymbol{\tau_{1y}} = \boldsymbol{\tau_1} \cdot \mathbf{\sigma\upsilon\nu\varphi = F \cdot r_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = F \cdot d_1}$

$\boldsymbol{\tau_{2y}} = \boldsymbol{\tau_2} \cdot \mathbf{\sigma\upsilon\nu\theta = F \cdot r_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = F \cdot d_2}$

Και τελικά το μέτρο της ζητούμενης ροπής του ζεύγους είναι:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Sigma\tau_y} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\tau_{1y}} + \boldsymbol{\tau_{2y}} = \mathbf{F \cdot (d_1 + d_2)} \;\rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F \cdot d}}$$

<u>2ος τρόπος</u>

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε κατευθείαν τις συνιστώσες των ροπών $\boldsymbol{\tau_1}$ και $\boldsymbol{\tau_2}$ από τις αποστάσεις $\mathbf{d_1}$ και $\mathbf{d_2}$ καθώς και από την απόσταση **h** του σημείου **Σ** από το επίπεδο των δύο δυνάμεων:

$\boldsymbol{\tau_{1x}} = \boldsymbol{\tau_{2x}} = \mathbf{F \cdot h} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\Sigma\tau_x} = \mathbf{0}$

και:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\tau_{1y}} = \mathbf{F \cdot d_1} \\ \boldsymbol{\tau_{2y}} = \mathbf{F \cdot d_2} \end{array}\right| \;\rightarrow\; \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Sigma\tau_y} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\tau_{1y}} + \boldsymbol{\tau_{2y}} = \mathbf{F \cdot (d_1 + d_2)} \;\rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F \cdot d}}$$

<u>3ος τρόπος</u>

Και υπάρχει βέβαια και ο νόμος των συνημιτόνων:

$\boldsymbol{\tau_1} = \mathbf{F \cdot r_1}$ και $\boldsymbol{\tau_2} = \mathbf{F \cdot r_2}$

Η συνισταμένη τους $\boldsymbol{\tau}$ έχει μέτρο:

$$\boldsymbol{\tau} = \sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + 2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega)}} = \mathbf{F} \cdot \sqrt{\mathbf{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}} = \mathbf{F \cdot d} \quad \text{κ.λ.π.}$$

Διονύσης Μητρόπουλος