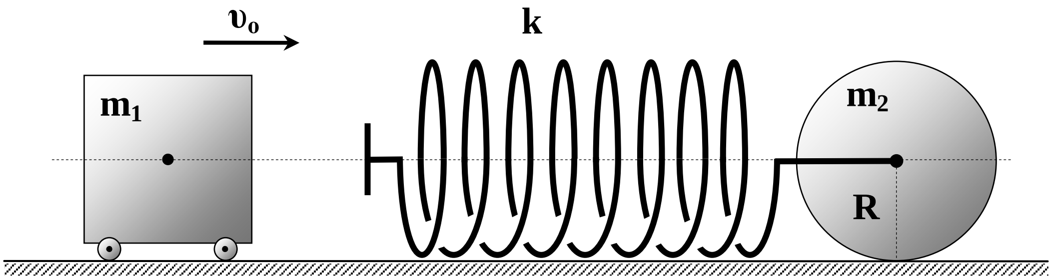
Σώμα πέφτει πάνω σε ελατήριο συνδεδεμένο με κύλινδρο



Ο κύβος και ο κύλινδρος του σχήματος είναι σώματα ομογενή, έχουν ίδιες μάζες $\mathbf{m_1=m_2=m=5kg}$ και τα κέντρα μάζας τους βρίσκονται πάνω στον άξονα του ελατηρίου, που είναι οριζόντιος και απέχει απόσταση **R** από το έδαφος. Το ελατήριο είναι ιδανικό, σταθεράς **k=300N/m** και είναι στερεωμένο κατάλληλα στον άξονα του κυλίνδρου, ώστε να επιτρέπει την ελεύθερη περιστροφή του κυλίνδρου γύρω από αυτόν.

Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και δαπέδου είναι **μ=0,2** και το σύστημα κυλίνδρου – ελατηρίου ηρεμεί αρχικά πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

Ο κύβος μπορεί να κινείται ελεύθερα χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο και εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου $\mathbf{\upsilon_o}$ προς το ελατήριο κατά τη διεύθυνση του άξονά του, έρχεται σε επαφή με αυτό χωρίς απώλειες ενέργειας και αρχίζει να το συμπιέζει.

Ο κύλινδρος τότε αρχίζει να κυλίεται, με την επίδραση της δύναμης που του ασκεί το ελατήριο.

***ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ*:**

1. Να υπολογίσετε το μέγιστο μέτρο της δύναμης που μπορεί να δεχτεί ο κύλινδρος από το συμπιεζόμενο ελατήριο, ώστε να κυλίεται χωρίς να αρχίσει να ολισθαίνει.

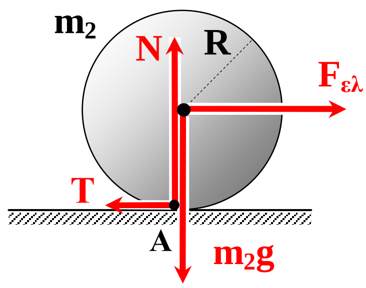
2. Να υπολογίσετε το μέγιστο επιτρεπτό μέτρο της ταχύτητας $\mathbf{\upsilon_o}$ του κύβου, ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται συνεχώς χωρίς ολίσθηση.

3. Να υπολογίσετε στην περίπτωση αυτή τις τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων.

(Για τον κύλινδρο, ως προς τον άξονά του: $\mathbf{I={}^1/_2 \cdot m_2 \cdot R^2}$ και $\mathbf{g=10m/sec^2}$).

***ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ*:**

(Τα σύμβολα αντιστοιχούν σε μέτρα μεγεθών).



1. Για την κύλιση του κυλίνδρου έχουμε:

$$\mathbf{\Sigma F_y = 0 \implies N = m_2 \cdot g} \quad (i)$$

$$\mathbf{\Sigma F_x = m_2 \cdot \alpha_{cm} \implies F_{\varepsilon\lambda} - T = m_2 \cdot \alpha_{cm}} \quad (ii)$$

$$\Sigma\tau_{(cm)} = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Longrightarrow T\cdot R = {}^1/_2\cdot m_2\cdot R^2\cdot\alpha_{cm}/R \Longrightarrow$$

$$T = {}^1/_2\cdot m_2\cdot\alpha_{cm} \quad (iii)$$

Από (***ii***) και (***iii***) προκύπτει ότι η στατική τριβή έχει μέτρο:

$$T = F_{\varepsilon\lambda} / 3$$

Όμως η στατική τριβή δεν μπορεί να υπερβεί το όριό της (η ισότητα οριακά):

$$T \leq \mu\cdot m_2\cdot g$$

Οπότε έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda} \leq 3\cdot\mu\cdot m_2\cdot g$ και τελικά:

$$\boxed{F_{\varepsilon\lambda,\ max} = 3\cdot\mu\cdot m_2\cdot g = 30N}$$

2. Αμέσως μετά την επαφή του με το ελατήριο η ταχύτητα υ_1 του κύβου μειώνεται, ενώ ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται και η ταχύτητα υ_2 του κέντρου μάζας του αυξάνεται. Όσο $\upsilon_1>\upsilon_2$ τα δύο σώματα πλησιάζουν, το ελατήριο συμπιέζεται και αποκτά τη μέγιστη συσπείρωσή του τη στιγμή που εξισώνονται οι δύο ταχύτητες: $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$. Στη συνέχεια τα σώματα απομακρύνονται και το ελατήριο τελικά χαλαρώνει.

Για να μην αρχίσει όμως ο κύλινδρος να ολισθαίνει, η τάση του ελατηρίου δεν πρέπει να ξεπεράσει την τιμή $F_{\varepsilon\lambda,\ max}$ που υπολογίσαμε προηγουμένως. Από εδώ μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, τη στιγμή ακριβώς που τα δύο σώματα αποκτούν την ίδια ταχύτητα υ:

$$F_{\varepsilon\lambda,\ max} = k\cdot\Delta l_{max} \Longrightarrow \Delta l_{max} = 0{,}1m$$

Για να υπολογίσουμε τώρα την κοινή ταχύτητα υ τη στιγμή που το ελατήριο έχει αποκτήσει τη μέγιστη συσπείρωσή του, σκεπτόμαστε ως εξής:

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε όλο το σύστημα εξουδετερώνονται μεταξύ τους, εκτός από τη στατική τριβή **T** που ασκείται στον κύλινδρο στο σημείο επαφής του **A** με το δάπεδο. Επιπλέον, η κύλιση του κυλίνδρου μπορεί να θεωρηθεί κάθε στιγμή ως στροφική κίνηση (ίδιας γωνιακής ταχύτητας ω) γύρω από στιγμιαίο άξονα **A** που διέρχεται από το σημείο αυτό.

Επειδή η τριβή διέρχεται από το **A**, ισχύει: $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\,(A)} = 0$ και:

$$L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Longrightarrow m_1\cdot\upsilon_o\cdot R + 0 = m_1\cdot\upsilon_1\cdot R + I_A\cdot\omega$$

Όπου I_A η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον εν λόγω άξονα. Αλλά:

$$I_A\cdot\omega = ({}^1/_2\cdot m_2\cdot R^2 + m_2\cdot R^2)\cdot\upsilon_2/R \Longrightarrow I_A\cdot\omega = {}^3/_2\cdot m_2\cdot\upsilon_2\cdot R$$

Έτσι η διατήρηση της στροφορμής γίνεται:

$$m_1\cdot\upsilon_o\cdot R + 0 = m_1\cdot\upsilon_1\cdot R + {}^3/_2\cdot m_2\cdot\upsilon_2\cdot R$$

Αντικαθιστώντας $m_1=m_2=m$ και $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$ παίρνουμε:

$$m\cdot\upsilon_o\cdot R = m\cdot\upsilon\cdot R + {}^3/_2\cdot m\cdot\upsilon\cdot R \Longrightarrow \upsilon_o = {}^5/_2\cdot\upsilon$$ και τελικά:

$$\upsilon = {}^2/_5\cdot\upsilon_o$$

Από τη διατήρηση τώρα της μηχανικής ενέργειας (αφού $W_T=0$) έχουμε:

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} + U_{(max)} \Longrightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_o^2 = \tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2 + \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot\Delta l_{max}^2 \Longrightarrow$$

$$m\cdot\upsilon_o^2 = m\cdot\upsilon^2 + m\cdot\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot R^2\cdot(\upsilon/R)^2 + k\cdot\Delta l_{max}^2 \Longrightarrow$$

$m\cdot\upsilon_o^2 = \tfrac{5}{2}m\cdot\upsilon^2 + k\cdot\Delta l_{max}^2$ και θέτωντας $\upsilon = \tfrac{2}{5}\cdot\upsilon_o$:

$$m\cdot\upsilon_o^2 = \tfrac{5}{2}m\cdot(\tfrac{2}{5}\cdot\upsilon_o)^2 + k\cdot\Delta l_{max}^2 \Longrightarrow \boxed{\upsilon_0 = \Delta l_{max}\cdot\sqrt{\frac{5\cdot k}{3\cdot m}} = 1m/sec}$$

3. Όπως περιγράψαμε πιο πάνω, το ελατήριο τελικά αποσυμπιέζεται και τα σώματα αποκτούν σταθερές ταχύτητες υ_1 και υ_2:

$$L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Longrightarrow m_1\cdot\upsilon_o\cdot R + 0 = m_1\cdot\upsilon_1\cdot R + \tfrac{3}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_2\cdot R$$

$$\xrightarrow{\text{ίσες μάζες}} \upsilon_o = \upsilon_1 + \tfrac{3}{2}\cdot\upsilon_2 \qquad \textit{(iv)}$$

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Longrightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_o^2 = \tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_2^2 + \tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot m_2\cdot R^2)\cdot(\upsilon_2/R)^2$$

$$\xrightarrow{\text{ίσες μάζες}} \upsilon_o^2 = \upsilon_1^2 + \tfrac{3}{2}\cdot\upsilon_2^2 \qquad \textit{(v)}$$

Επιλύουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_o - \upsilon_1 = \tfrac{3}{2}\cdot\upsilon_2 \\ \upsilon_o^2 - \upsilon_1^2 = \tfrac{3}{2}\cdot\upsilon_2^2 \end{array}\right| \Longrightarrow \ldots \quad \boxed{\begin{array}{c} \upsilon_1 = -\,0{,}2\cdot\upsilon_o = -\,0{,}2\ m/sec \\ \upsilon_2 = 0{,}8\cdot\upsilon_o = 0{,}8\ m/sec \end{array}}$$

Δηλαδή ο κύβος αλλάζει τελικά τη φορά της κίνησής του.

Παρατήρηση:

Να συγκρίνετε το φαινόμενο αυτό με την κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων με ίσες μάζες, όπου το ένα είναι αρχικά ακίνητο. Τι παρατηρείτε και πως το δικαιολογείτε;